Limites de fonctions

La fonction « lim » du ClassPad permet de calculer des limites de fonctions, ainsi que les limites à gauche et à droite.
La détermination de limites permet d'analyser le comportement des fonctions aux bornes de leur ensemble de définition. Pour les fonctions rationnelles, on peut vérifier la présence de pôles et de quelle sorte sont ces pôles. On peut déterminer des nombres dérivés à l'aide de la définition $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. La pertinence de la règle de l'Hospital peut être donnée à titre d'exemple. En outre, on peut rechercher une continuité des fonctions en certains points. On peut donner l'exemple du calcul d'intégrale où des sommes supérieures et inférieures convergent vers la même valeur.

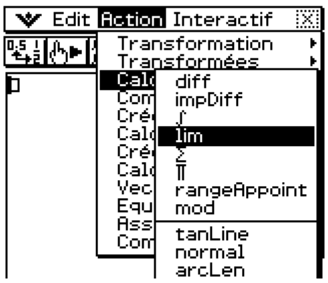
Exemple

Déterminez la valeur limite $\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$.

Valeurs limites de fonctions au voisinage de l'infini

Dans la barre d'icônes, tapez sur <Main> (menu principal) pour afficher le menu d'application principale.

Pour déterminer la valeur limite d'une fonction, la fonction « lim » est à chaque fois suivie, séparés par des virgules, de l'expression de la fonction, de la variable et de la valeur vers laquelle doit tendre la variable.

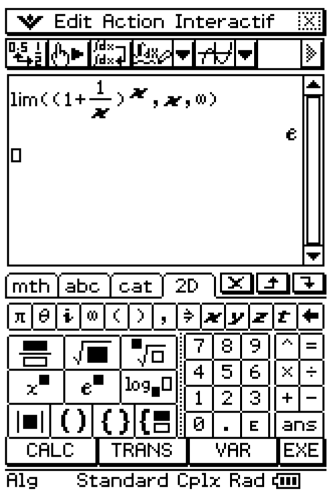


Détermination de la valeur limite avec la fonction « lim » du menu Action

Dans la barre de menus, sélectionnez [Action ▸ Calcul ▸ lim] pour entrer la fonction « lim ».

Ensuite, entrez l'expression de la fonction $(1 + \frac{1}{x})^x$ en utilisant le clavier 2D et, respectivement après une virgule, la variable de fonction x et la valeur ∞.

[Keyboard] [2D] [( ] [1] [+] [$\frac{\square}{\square}$] [1][▼][x] [►] [ )] [$x^{\square}$] [x] [►] [,] [x] [,] [∞] [ )] [EXE]



$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

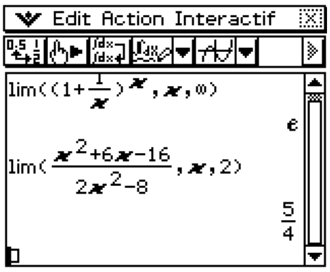
Exemple

Recherchez le comportement de la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 16}{2x^2 - 8}$ au voisinage de $x = 2$ et $x = -2$.

Auteur : Torsten Gebauer

Valeurs limites de fonctions sur des points réels

Détermination de la valeur limite pour $x \to 2$ avec la fonction « lim » du menu Action

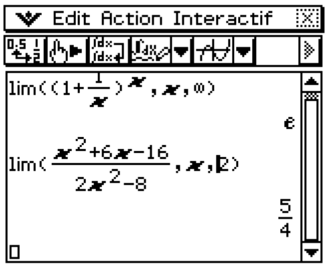


Dans la barre de menus, sélectionnez [Action ▸ Calcul ▸ lim] pour entrer la fonction « lim ». Ensuite entrez l'expression de la fonction $\frac{x^2+6x-16}{2x^2-8}$ et, respectivement après une virgule, la variable de fonction x et la valeur 2.

[x] [2] [▶] [+] [6][x] [−] [1][6] [▼]
[2][x] [2] [▶] [−] [8] [▶] [,] [x] [,] [2] [ )] [EXE]

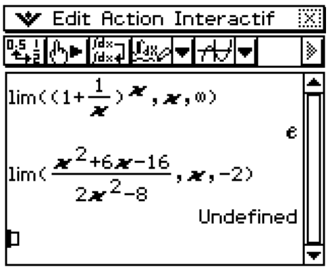
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+6x-16}{2x^2-8} = \frac{5}{4}$$

On remarque alors que la fonction f est prolongeable par continuité en 2.



Détermination de la valeur limite pour $x \to -2$

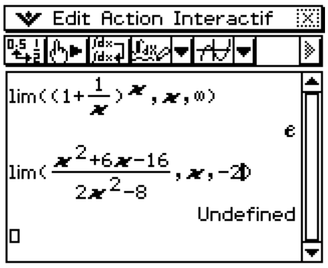
Tapez dans la dernière ligne d'entrée derrière la deuxième virgule pour y positionner le curseur. Ensuite appuyez sur [(–)] pour insérer le signe négatif, puis sur [EXE].



L'indication « Undefined » signifie que la valeur limite $\lim_{x \to -2} \frac{x^2+6x-16}{2x^2-8}$ n'existe pas.

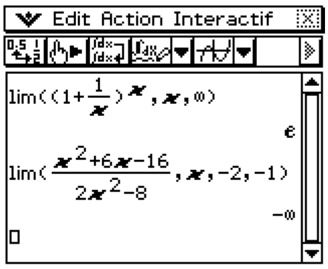
Valeurs limites à gauche et à droite

Pour déterminer la valeur limite à gauche d'une fonction, dans la parenthèse de la fonction « lim », la valeur vers laquelle doit tendre la variable est suivie par une virgule et un nombre négatif (ex. : −1). Pour déterminer la valeur limite à droite, par un nombre positif (ex. : 1).



Détermination de la valeur limite à gauche pour $x \to -2$ avec $x < -2$

Tapez dans la dernière ligne d'entrée devant la parenthèse fermée pour y positionner le curseur. Ensuite insérez une virgule et −1 à l'aide de [,] [(–)] [1], et appuyez sur [EXE].

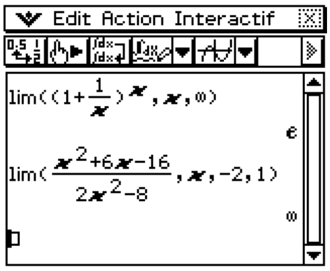


$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{x^2+6x-16}{2x^2-8} = -\infty$$

Détermination de la valeur limite à droite pour $x \to -2$ avec $x > -2$

Tapez dans la dernière ligne d'entrée derrière le signe négatif du nombre −1 pour y positionner le curseur. Ensuite, effacez le signe négatif avec [⬅] et appuyez sur [EXE].

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{x^2 + 6x - 16}{2x^2 - 8} = \infty$$



La courbe représentant la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$.

Exemple

Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$. Déterminer la dérivée de g en utilisant une limite.

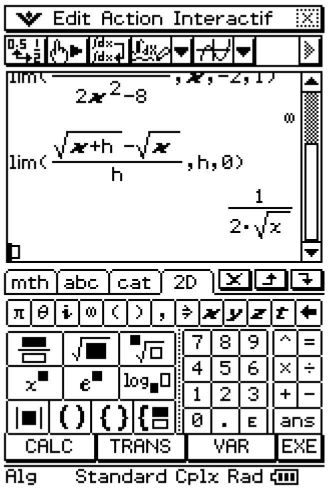
Calcul de la dérivée

On a : $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

Détermination de la dérivée en un point avec la fonction « lim » du menu Action

Pour entrer la fonction « lim » dans une nouvelle ligne d'entrée, sélectionnez dans la barre de menus [Action ▸ Calcul ▸ lim].

Ensuite, entrez le **Quotient différentiel** $\dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$ et, respectivement après une virgule, la variable h et la valeur 0. On peut entrer h avec les touches variables.



[▭/▭] [√▭] [x] [+] [VAR] [h] [▶] [−] [⮌] [√▭] [x] [▼]
[VAR] [h] [▶] [,] [h] [,] [0] [ )] [EXE]

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

Auteur : Torsten Gebauer

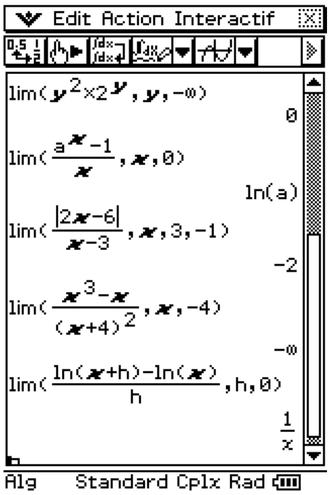
Exercice

Déterminez les limites suivantes.

1) $\lim\limits_{y \to -\infty} y^2 \cdot 2^y$ **2)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ **3)** $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{|2x - 6|}{x - 3}$

Recherchez le comportement de la fonction $f(x) = \frac{x^3 - x}{(x+4)^2}$ **au voisinage de** -4**.**

Soit g **la fonction définie sur** $]0; +\infty[$ **par** $g(x) = \ln x$**. Déterminer la dérivée de** g **en utilisant une limite.**



Auteur : Torsten Gebauer

Retrouvez cette fiche et d'autres documentations sur
http://www.cornelsen-teachweb.de/co/casio