Définition de fonctions

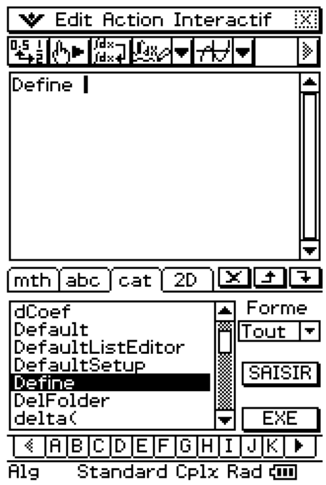
Le ClassPad permet de définir des fonctions. Par exemple, avec un nom de fonction *f*, on peut utiliser des expressions telles que *f*(2); *f*(*x*); *f*(–*x*) et *f*(*x*+*h*). Ceci est notamment utile lorsque des fonctions apparaissent plusieurs fois avec différents arguments, comme par exemple pour des recherches de symétries et de périodicité, pour de déplacement et les effets miroirs de fonctions, pour la détermination du quotient différentiel et pour le calcul des sommes supérieure et inférieure pour obtenir une approximation d'aire.
On peut facilement composer les fonctions.

> **Exemple**
> **Recherchez si la fonction *f* définie par $f(x) = x^2 + 4x + 1$ est paire ou impaire. Déterminez l'expression de la fonction *g* dont la représentation graphique est l'image de celle de *f* par la translation de vecteur $2\vec{\imath}$.**

Construction d'une fonction définie par l'utilisateur

Dans la barre d'icônes, tapez sur <Main> (menu principal) pour afficher le menu d'application principal.

Une fonction définie par l'utilisateur peut être créée par la fonction « Define ». La fonction « Define » est suivie d'un espace et du nom de la fonction puis des variables entre parenthèses, du symbole = et de l'expression de la fonction. Si la fonction comporte plusieurs variables, celles-ci sont séparées par des virgules.



Définition de f avec la fonction « Define »

À l'aide du clavier [Keyboard] [cat], vous affichez le clavier catalogue. Ici, tapez sur la flèche [▼] se trouvant sous Form et sélectionnez Cmd. Ensuite, tapez sur [D] dans la rangée de lettres, puis deux fois sur Define pour sélectionner et entrer la fonction « Define ».

Entrez alors l'équation de la fonction $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en utilisant le clavier alphabétique.

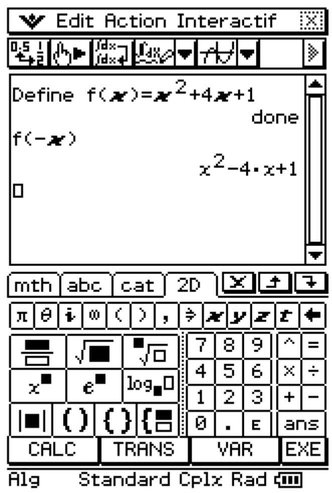
[abc] [f][( ][*x*][ )] [=] [*x*][∧][2] [+] [4][*x*] [+] [1]   [EXE]

Etude de la parité de *f*

Calcul de f (–x)

[f][( ][(–)][*x*][ )]   [EXE]

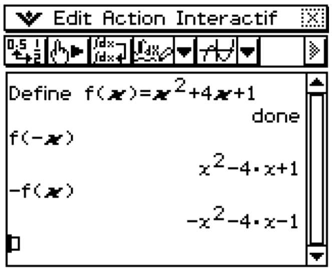
$f(–x) = x^2 – 4x + 1$



Comme $f(–x) \neq f(x)$, la courbe représentant la fonction *f* n'est pas symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Auteur : Torsten Gebauer

Calcul de $-f(x)$



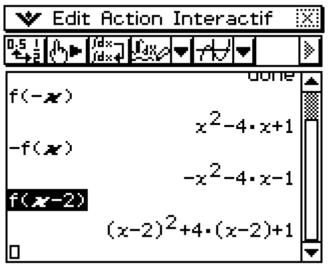
[(–)] [f] [( ][x][ )]   [EXE]

$-f(x) = -x^2 - 4x - 1$

Comme $f(-x) \neq -f(x)$, la représentation graphique de f n'est pas symétrique par rapport à l'origine du repère.

Composé de la fonction *f*

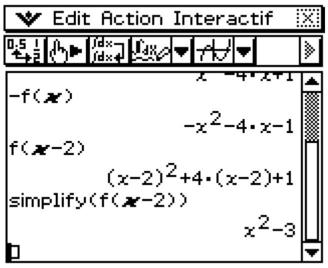
Calcul de $f(x-2)$



[f] [( ][x][–][2][ )]   [EXE]

Pour simplifier l'expression de la fonction composée, sélectionnez $f(x-2)$ dans la ligne d'entrée, puis sélectionnez dans la barre de menus [Interactif ▸ Transformation ▸ simplify].

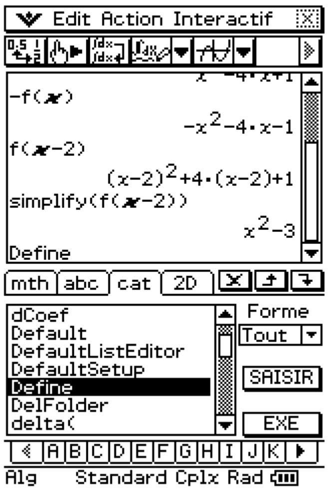
$f(x-2) = (x-2)^2 + 4 \cdot (x-2) + 1 = x^2 - 3$



Pour la fonction g dont la représentation graphique est l'image de celle de f par la translation de vecteur $2\vec{\imath}$, on a : $g(x) = f(x-2) = x^2 - 3$.

> **Exemple**
> **Approximez par la méthode des rectangles l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe (Ox), la courbe représentant la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 4x + 1$ sur l'intervalle $[0;\ a]$ avec $a > 0$. Divisez pour cela l'intervalle $[0;\ a]$ en n sous-intervalles de même grandeur et déterminez la somme supérieure $o(n)$ et la somme inférieure $u(n)$ de l'aire des rectangles en fonction de n.**
> **Déterminez les valeurs limites de $o(n)$ et $u(n)$ pour $n \to \infty$ afin d'obtenir la valeur de de A.**

Détermination des sommes supérieure et inférieure



Comme f est croissante monotone, on a pour la somme supérieure et la somme inférieure :

$$o(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{a}{n}\right) \qquad u(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{a}{n}\right)$$

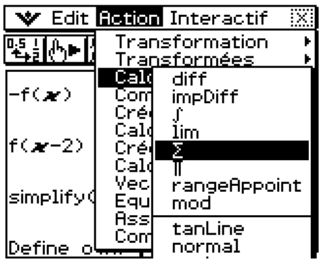
Définition de o(n) avec la fonction « Define »

Pour entrer la fonction « Define », tapez sur [cat] ,puis sur la fonction Define mise en surbrillance.

Auteur : Torsten Gebauer

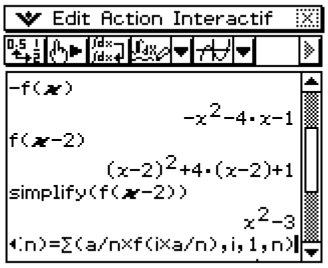
Ensuite, entrez l'expression de la suite $o(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{a}{n}\right)$.

abc o [( ] n [ )] [=]



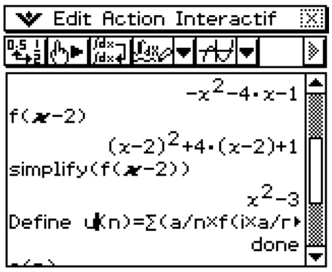
Pour entrer le symbole de la somme, sélectionnez [Action ▸ Calcul ▸ Σ]. Ensuite, on a le terme à additionner $\frac{a}{n} \cdot f\left(i \cdot \frac{a}{n}\right)$ et, respectivement séparés par une virgule, l'indice de la somme *i*, la valeur de départ 1 de l'indice et la valeur de fin *n* de l'indice.

[*a*][÷] n [×] f [( ] i [×][*a*][÷] n [ )] [,] i [,] [1] [,] n [ )]
[EXE]



Définition de u(n) avec la fonction « Define »

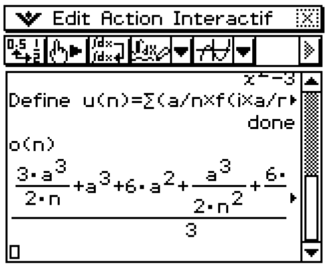
Sélectionnez le nom de la fonction *o* dans la dernière ligne d'entrée et remplacez-le par *u* en tapant sur u. Pour que la partie de droite de la ligne d'entrée soit visible, tapez sur la flèche à côté de la ligne d'entrée. Sélectionnez ici la valeur de départ 1 de l'indice et remplacez-la par 0 à l'aide de la touche [0]. En appuyant sur [▶] [▶] [–] [1], changez la valeur de fin en *n*–1. Ensuite, appuyez sur [EXE].



Calcul de la somme supérieure

o [( ] n [ )] [EXE]

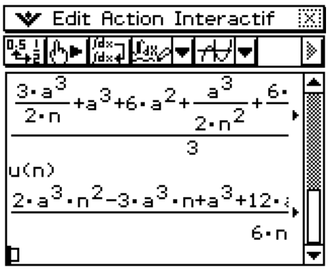
$$o(n) = \frac{1}{3}\left(a^3 + 6a^2 + 3a + \frac{3a^3}{2n} + \frac{6a^2}{n} + \frac{a^3}{2n^2}\right)$$



Calcul de la somme inférieure

u [( ] n [ )] [EXE]

$$u(n) = \frac{a^3 + 2n^2a^3 + 12n^2a^2 + 6n^2a - 3na^3 - 12na^2}{6n^2}$$



Définition des valeurs limites de *o*(*n*) et *u*(*n*) pour *n* → +∞

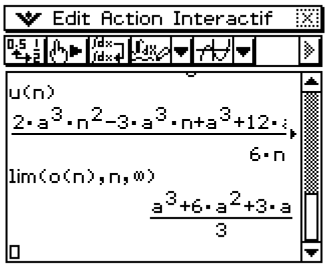
Détermination de la valeur limite de o(n) pour n → +∞ avec la fonction « lim »

Dans la barre de menus, sélectionnez [Action ▸ Calcul ▸ lim] pour entrer la fonction « lim ». Ensuite, entrez l'expression caractérisant la fonction *o*(*n*) et, respectivement séparées par une virgule, la variable de fonction *n* et la valeur +∞ en utilisant le clavier mathématique.

o [( ] n [ )] [,] n [,] mth ∞ [ )] [EXE]

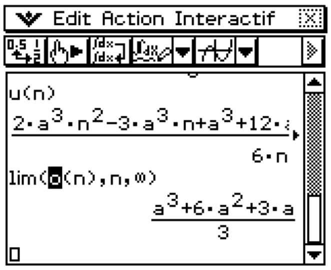
Auteur : Torsten Gebauer

$$\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{o}(\boldsymbol{n}) = \frac{\boldsymbol{a}^3}{\boldsymbol{3}} + 2a^2 + a$$



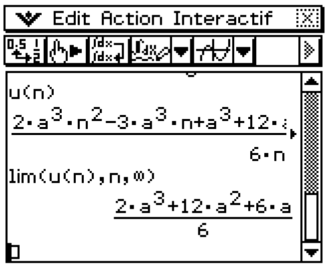
Détermination de la valeur limite de u(n) pour n → +∞

Pour répéter le dernier calcul dans la nouvelle ligne d'entrée, appuyez sur [EXE]. Sélectionnez le nom de la fonction *o* dans la ligne d'entrée et remplacez-le par *u* en tapant sur [abc] [u]. Puis, appuyez sur [EXE].



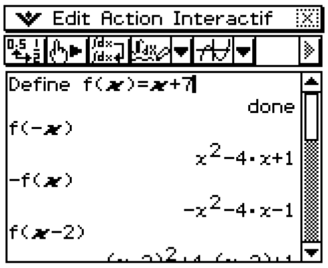
$$\lim_{n \to +\infty} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{n}) = \frac{\boldsymbol{a}^3}{\boldsymbol{3}} + 2a^2 + a$$

Comme la somme supérieure et la somme inférieure pour $n \to +\infty$ tendent vers la même valeur limite, la valeur de A a pour valeur $\frac{\boldsymbol{a}^3}{\boldsymbol{3}} + 2a^2 + a$.



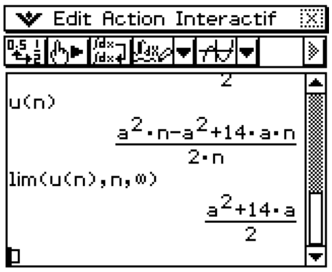
Nouveaux calculs avec une fonction modifiée

Les calculs réalisés jusqu'ici peuvent être réalisés de nouveau avec d'autres fonctions tout simplement en modifiant le terme de la fonction. Par exemple, définissez la fonction f par $f(x) = x + 7$.



Faites défiler la liste déroulante vers le haut, sélectionnez dans la première ligne d'entrée le terme de la fonction $x^2 + 4x + 1$ et remplacez-le à l'aide de [x] [+] [7] par le nouveau terme de la fonction $x + 7$.

Lorsque vous appuyez sur [EXE], le ClassPad réalise de nouveau le calcul ou redemande la fonction de la ligne dans laquelle se trouve le curseur, ainsi que tous les calculs et toutes les fonctions des lignes suivantes.
Dans le cas présent, vous obtenez en même temps, pour la nouvelle fonction aussi, la recherche de symétrie, le calcul de *g(x)*, les sommes supérieure et inférieure et leurs valeurs limites.



Auteur : Torsten Gebauer

Exercice

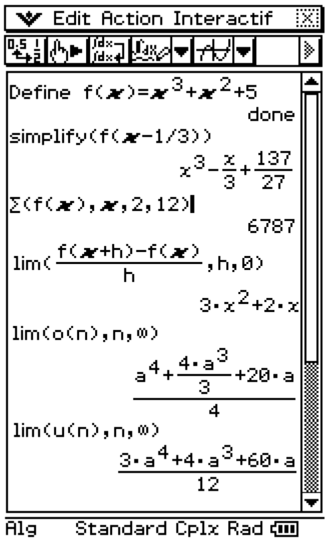
Déterminez l'expression de la fonction g dont la représentation graphique est l'image de celle de f par la translation de vecteur $\frac{1}{3}\vec{\imath}$, sachant que f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 + 5$.

Déterminez la somme des valeurs de $f(x)$ pour des valeurs de x entières comprise au sens large entre 2 à 12.

Calculez la dérivée de f à l'aide d'une limite.

Approximez par la méthode des rectangles l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe (Ox), la courbe représentant la fonction f sur l'intervalle $[0; a]$ avec $a > 0$. Divisez pour cela l'intervalle $[0; a]$ en n sous-intervalles de même grandeur et déterminez la somme supérieure $o(n)$ et la somme inférieure $u(n)$ de l'aire des rectangles en fonction de n.

Déterminez les valeurs limites de $o(n)$ et $u(n)$ pour $n \to \infty$ afin d'obtenir la valeur de de A



Auteur : Torsten Gebauer