Matrices

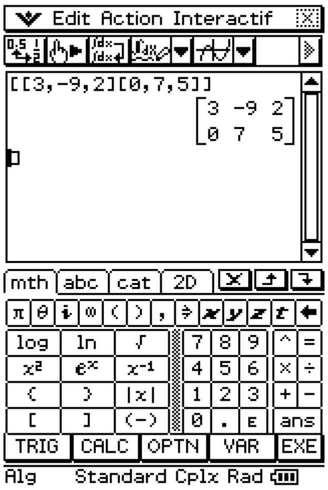
Le ClassPad permet de réaliser des opérations diverses avec des matrices. Outre l'addition, la soustraction et la multiplication de matrices, on peut déterminer des multiples, des inversions, des transposées et des déterminants de matrices et les utiliser dans des calculs. On peut déterminer des valeurs propres et des vecteurs propres. On peut transformer des lignes élémentaires par combinaisons linéaires et différentes décompositions de matrices.
Les matrices sont très importantes pour la description et la recherche d'applications affines et linéaires, mais aussi de processus et systèmes dans la nature, l'économie et la société. En outre, elles jouent un rôle important dans la résolution de systèmes d'équations linéaires.
Les matrices $1 \times n$ et les matrices $n \times 1$ représentent dans le ClassPad des vecteurs pour lesquels on dispose d'un certain nombre d'opérations supplémentaires.

Exemple

Multipliez la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ avec la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Indiquez pour la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ la matrice inverse, les valeurs propres et les vecteurs propres. Montrez que les valeurs propres de A concordent avec les racines du polynôme caractéristique.

Entrée de matrices



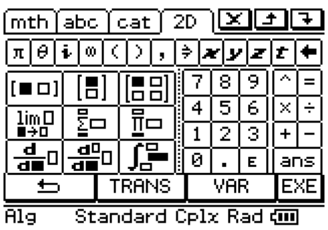
Dans la barre d'icônes, tapez sur <Main> (menu principal) pour afficher le menu d'application principale.

L'entrée d'une matrice peut se faire avec des crochets ou, très clairement, à l'aide du clavier 2D.
Dans la première variante, on spécifie la matrice entre crochets par ligne. Chaque ligne est également délimitée par des crochets et les entrées de chaque ligne sont séparées par des virgules.

Entrée de la première matrice avec des crochets

[Keyboard] [[[3] [,] [(–)][9] [,] [2]]
[[0] [,] [7] [,] [5]]] [EXE]

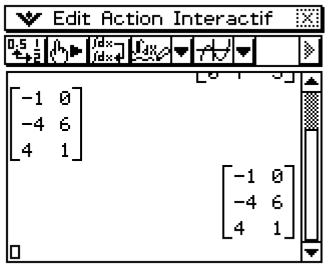
Tapez sur 2D pour afficher la deuxième partie du clavier 2D.



À l'aide des touches , ou vous pouvez entrer une matrice 1×2, une matrice 2×1 ou une matrice 2×2. Si le curseur se trouve dans une matrice déjà présente, vous pouvez agrandir la matrice d'une colonne en tapant sur , d'une ligne en tapant sur et d'une ligne et d'une colonne en tapant sur .

Auteur : Torsten Gebauer

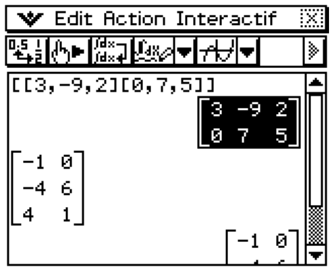
Entrée de la deuxième matrice à l'aide du clavier 2D



[(–)][1] [▶] [0] [(–)][4] [▶] [6] [4] [▶] [1] [EXE]

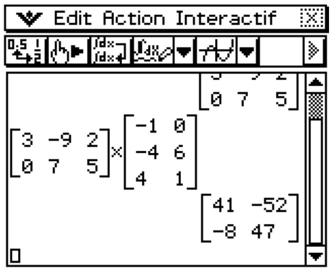
Calcul avec des matrices

Multiplication des deux matrices



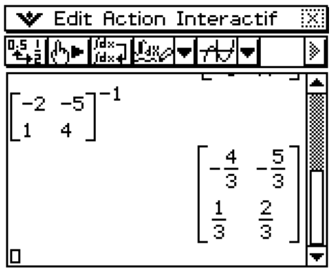
Faites défilez la liste déroulante vers le haut, sélectionnez la matrice dans la première ligne de résultat et déplacez-la devant la matrice dans la deuxième ligne de résultat. Entrez alors le signe de multiplication avec [×] et appuyez sur [EXE].

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -4 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & -52 \\ -8 & 47 \end{pmatrix}$$



Les matrices peuvent être également multipliées avec des nombres et, si elles ont le même format, être additionnées et soustraites. Pour les matrices carrées, on peut déterminer la puissance d'une matrice. L'exposant –1 donne la matrice inverse.

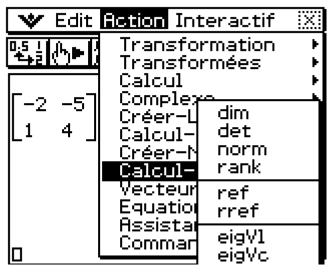
Détermination de la matrice inverse de A



[(–)][2] [▶] [(–)] [5] [1] [▶] [4] [▶]
[(–)][1] [EXE]

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Dans les sous-menus Création matrice et Calcul matrice du menu Action ou du menu Interactif, on a d'autres opérations pour les matrices.

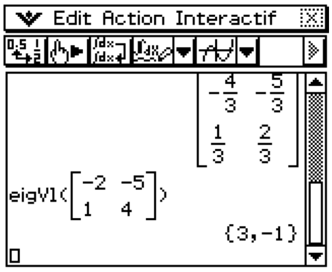


Détermination des valeurs propres de A avec la fonction « Vlprop » du menu Action

Dans la barre de menus, sélectionnez [Action ▸ Calcul-matrice ▸ eigVl] pour entrer la fonction « eigVl ».
Pour copier la matrice *A*, sélectionnez celle-ci dans la ligne d'entrée précédente et tapez sur . Tapez alors derrière le crochet de la nouvelle ligne d'entrée et insérez la matrice *A* avec . Ensuite, appuyez sur [ )] [EXE].

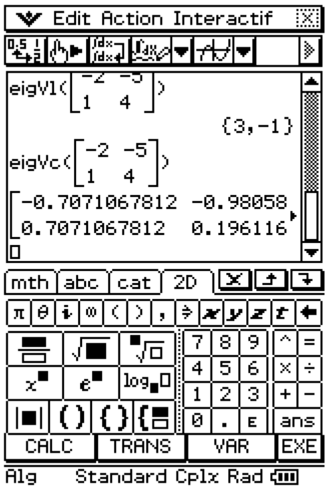
Les valeurs propres de la matrice *A* sont 3 et –1.

Auteur : Torsten Gebauer



La fonction « eigVl » donne des valeurs propres n pour une matrice $n \times n$. Chaque valeur propre est affichée autant de fois que son ordre de multiplicité.

La fonction « eigVc » donne, pour une matrice $n \times n$, n vecteurs propres normalisés appartenant aux valeurs propres de la fonction « eigVl » en fonction de leur ordre. Si la dimension d'un espace propre est inférieure au multiple algébrique de la valeur propre correspondante, les vecteurs propres sont linéairement indépendants.

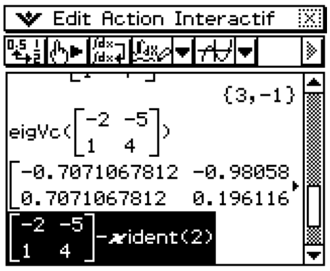


Détermination de vecteurs propres de A avec la fonction « eigVc »

Dans la barre de menus, sélectionnez [Action ▸ Calcul matrice ▸ eigVc] pour entrer la fonction « eigVc ».
Ensuite, insérez la matrice A qui se trouve dans le presse-papiers à l'aide de et appuyez sur [ )] [EXE].

Les vecteurs propres normalisés de la matrice A sont approximativement :

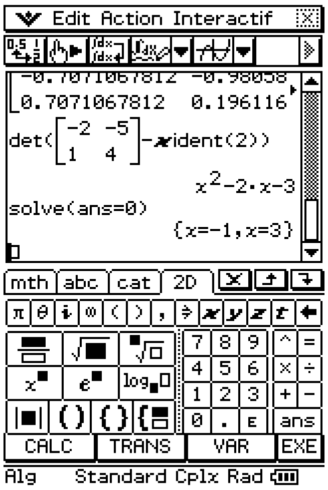
$\begin{pmatrix} -0{,}707 \\ 0{,}707 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre 3 et $\begin{pmatrix} -0{,}981 \\ 0{,}196 \end{pmatrix}$ pour la valeur propre -1.



Détermination du polynôme caractéristique de A

Pour entrer le polynôme caractéristique $P_A(x) = \det(A - x \cdot E_2)$, insérez la matrice A à l'aide de et appuyez sur les touches [–] [x] pour le signe moins et la variable x. Pour entrer la matrice unitaire, sélectionnez dans la barre de menus [Action ▸ Création matrice ▸ ident] et à l'aide des touches [2] [ )] la dimension 2.
Sélectionnez alors toute la ligne d'entrée et choisissez dans la barre de menus [Interactif ▸ Calcul matrice ▸ det] pour entrer la fonction « det » permettant de déterminer le déterminant.

Le polynôme caractéristique de A est : $P_A(x) = x^2 - 2x - 3$



Détermination des points nuls du polynôme caractéristique

Dans la barre de menus, sélectionnez [Action ▸ Équ./Inéq. ▸ solve] pour entrer la fonction « solve ».

ans [=] [0] [ )] [EXE]

Les points nuls du polynôme caractéristique de A donnent –1 et 3 en concordance avec les valeurs propres.

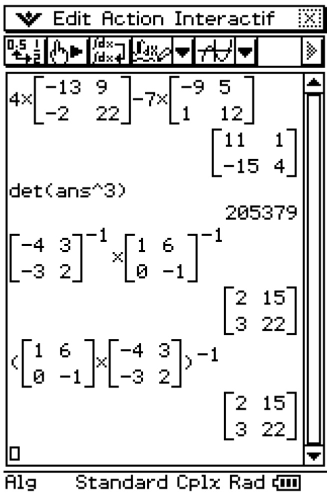
Auteur : Torsten Gebauer

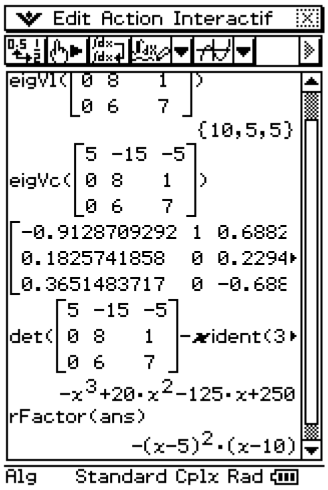
Exercice

Calculez $4 \cdot \begin{pmatrix} -13 & 9 \\ -2 & 22 \end{pmatrix} - 7 \cdot \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 1 & 12 \end{pmatrix}$ **et le déterminant de la troisième puissance de la matrice résultat.**

Montrez que, pour les matrices inverses de $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ **et** $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$**, on a :** $A^{-1} \cdot B^{-1} = (B \cdot A)^{-1}$.

Pour la matrice $\begin{pmatrix} 5 & -15 & -5 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}$**, indiquez les valeurs propres, les vecteurs propres et le polynôme caractéristique. Factoriser le polynôme caractéristique.**





Auteur : Torsten Gebauer

Retrouvez cette fiche et d'autres documentations sur
http://www.cornelsen-teachweb.de/co/casio