

Applications affines dans le plan

Le ClassPad permet de réaliser dans le plan géométrique des applications affines simples, comme par exemple des symétries axiales, des translations, des rotations et des comparaisons de longueurs. On peut indiquer les coordonnées d'objets géométriques avant et après l'application ainsi que l'équation de l'application. Cela permet de réaliser de multiples recherches analytiques.

Par exemple, on peut calculer le déterminant, les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice de l'application pour obtenir des informations sur la réversibilité, l'orientation, la comparaison des angles, la comparaison des longueurs, les variations d'aire, les éléments invariants des applications.

Exemple

Dans le plan, le triangle ayant pour sommets (1; 0), (3; -1) et (2; -2) subi une rotation, de centre l'origine (0; 0) d'angle de 60° (sens trigonométrique). Quelles sont les coordonnées des sommets du triangle image ? Quelle est la matrice de cette application ?

Solution par le calcul

Dans la barre d'icônes, tapez sur <Main> (menu principal) pour afficher le menu principal.

Dans le plan, une rotation par rapport à l'origine (0; 0) avec l'angle φ peut être décrite par la matrice de l'application suivante :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Saisie de la matrice de l'application pour l'angle φ = 60°

Pour entrer la matrice, utilisez la deuxième partie du clavier 2D.

[Keyboard]

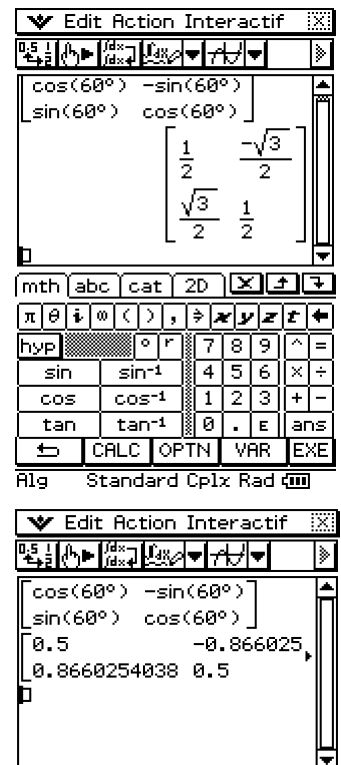
Les touches vous permettent d'obtenir les touches trigonométriques du clavier mathématique. Pour entrer l'angle en degré, ajoutez aux valeurs en degré dans le mode radian le symbole ° par le biais de la touche .

[6] [0] [)] [>] [(-)] [6] [0] [)] [<] [<]
 [6] [0] [)] [>] [6] [0] [)] [EXE]

Pour afficher la matrice en écriture décimale, tapez dans la ligne de résultat, puis dans la barre de symboles sur .

La matrice de cette application donne :

$$\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,5 & -0,866 \\ 0,866 & 0,5 \end{pmatrix}$$



Les triangles dans le plan peuvent être décrits par une matrice 2×3 , dans laquelle les colonnes représentent les coordonnées des sommets.

Le produit de la matrice de l'application avec la matrice formée par les coordonnées des sommets du triangle donne la matrice qui décrit le triangle après rotation par rapport à l'origine (0; 0) selon un angle de 60° .

Produit de la matrice d'application avec la matrice du triangle

Tapez dans la première ligne d'entrée derrière la matrice de l'application.

[\times] [2D] [] [1] [▼] [] [0] [] [3] [▼] [(-)] [1] [] [2] [▼] [(-)] [2] [EXE]

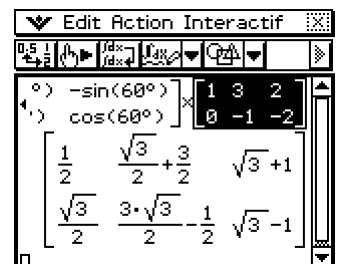
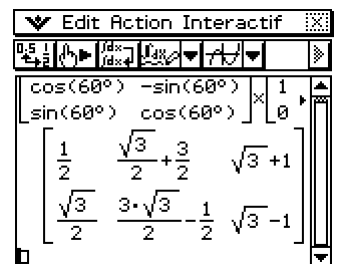
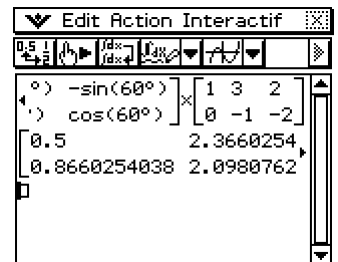
Si vous voulez faire apparaître les éléments non visibles du résultat, tapez sur la flèche à côté de la ligne de résultat.
Pour afficher les valeurs exactes des coefficients de la matrice résultat, tapez dans la ligne de résultat, puis dans la barre de symboles sur $\left[\frac{0.5}{\pm} \right]$.

Les sommets du triangle image par cette rotation ont les coordonnées suivantes:

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \approx (0,5; 0,866)$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \approx (2,366; 2,098)$$

$$(1 + \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}) \approx (2,732; 0,732)$$

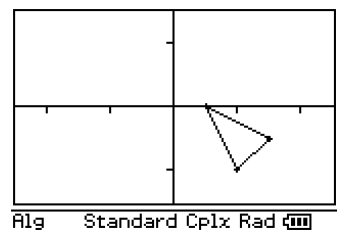


Solution géométrique

Pour ouvrir une fenêtre géométrique, tapez dans la barre de symboles sur la flèche $\left[\frac{0.5}{\pm} \right]$ des boutons de l'application, puis sur $\left[\frac{0.5}{\pm} \right]$.

Tracé du triangle

Sélectionnez la matrice du triangle dans la ligne d'entrée de la fenêtre de l'application principale et déplacez-la dans la fenêtre géométrique.






Il est plus difficile de tracer un triangle d'abord dans la fenêtre géométrique, puis de saisir les positions exactes des sommets à l'aide du champ de mesure dans la barre de symboles.

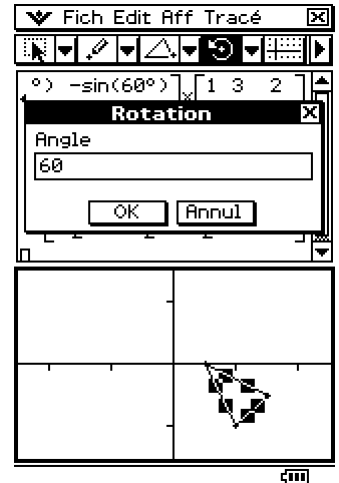
Afficher les axes de coordonnées

Pour insérer les axes de coordonnées, tapez dans la barre de symboles de la fenêtre géométrique sur $\left[\frac{0.5}{\pm} \right]$.

Rotation du triangle par rapport à l'origine selon un angle de 60°

Tapez sur les trois côtés du triangle pour sélectionner le triangle, et dans la barre de symboles de la fenêtre géométrique sur la flèche  des boutons de construction, puis sur .


Tapez alors avec le crayon pour marquer le centre de rotation sur l'origine du repère. Si la boîte de dialogue s'ouvre, entrez l'angle en degré à l'aide des touches [6][0]. Après avoir tapé sur , l'image du triangle par la rotation de centre l'origine du repère et d'angle de 60° apparaît.

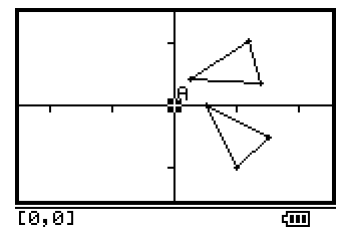
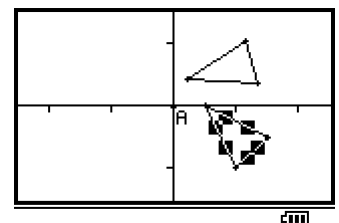


Il peut parfois arriver que le centre de rotation ne se trouve pas exactement à l'origine (0; 0).

Vérification de la position du centre de rotation

Pour annuler la sélection, tapez à un endroit libre dans la fenêtre géométrique. Puis, tapez sur le centre de rotation afin d'afficher ses coordonnées en bas à gauche dans la barre d'état.

Si les coordonnées du centre de rotation sont différentes de (0; 0), tapez dans la barre de symboles de la fenêtre géométrique sur  pour afficher le champ de mesure. Tapez alors sur le champ de mesure et remplacez les coordonnées indiquées par les coordonnées (0; 0) à l'aide des touches [() [0] [,] [0] [)] [EXE].



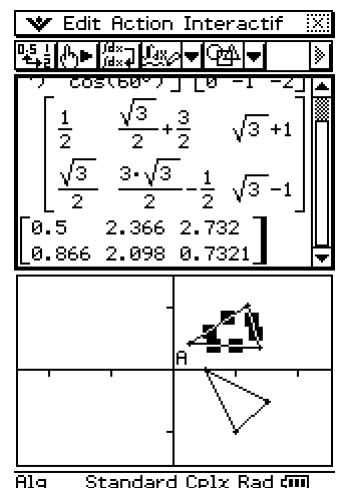
Si l'on change la position du centre de rotation, la position de l'image du triangle est également modifiée automatiquement.

Affichage des coordonnées des sommets du triangle image dans la fenêtre de l'application principale

Pour annuler la sélection, tapez à un endroit libre dans la fenêtre géométrique.

Puis tapez sur les trois sommets du triangle tourné et déplacez-le, dans la fenêtre de l'application principale, dans la position de la nouvelle ligne d'entrée. Lorsque le curseur clignote, relevez le crayon de l'écran.

On obtient la matrice qui contient sous forme de colonnes les coordonnées des sommets du triangle image, en conformité avec la solution par le calcul.



En plus des rotations, on peut également réaliser dans la fenêtre géométrique, en utilisant d'autres boutons de construction dans la barre de symboles ou du sous-menu Tracé-Construire dans la barre de menus, des symétries axiales, des translations, des comparaisons de longueurs et d'autres applications affines du plan.

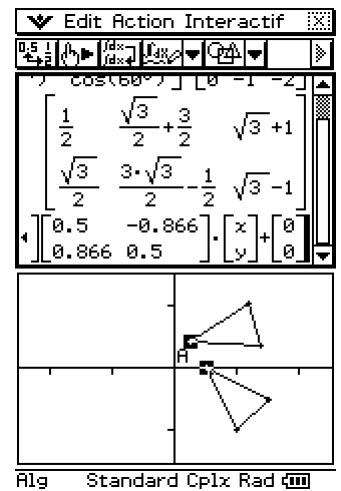
Si l'on sélectionne, dans la fenêtre géométrique, un point et un point d'image correspondant d'une application affine, et si on les déplace dans la fenêtre de l'application principale, on peut afficher la matrice de l'application.

Affichage de la matrice d'application

Supprimez la matrice à l'aide de la touche [Clear] et tapez dans la fenêtre géométrique à un endroit libre pour annuler la sélection.

Puis, pour sélectionner, tapez par exemple sur le point (1; 0) et le point d'image pour (0,5; 0,866) et déplacez-les dans la fenêtre de l'application principale vers la position de la nouvelle ligne d'entrée. Lorsque le curseur clignote, relevez le crayon de l'écran.

On obtient la matrice de l'application et les coordonnées du vecteur de translation. Comme il s'agit d'une rotation par rapport à l'origine, il n'y a pas de translation (le vecteur de translation est le vecteur nul) et l'application peut être décrite uniquement par la matrice de cette application. Celle-ci est conforme à la matrice d'application qui a été utilisée pour la solution par le calcul.



Exercice

Dans le plan, le triangle dont les sommets ont pour coordonnées (4; 2), (3; 0,5) et (2; 1) subi une rotation par rapport au point de coordonnées (1; -0,5) d'angle 90° (sens trigonométrique).

Quelles sont les coordonnées des sommets du triangle image par cette rotation ? Quelle est la matrice de cette application ?

