Vecteurs

Dans le ClassPad, les vecteurs sont représentés par des matrices $1 \times n$ et des matrices $n \times 1$. En plus des opérations possibles avec les matrices, telles que l'addition, la soustraction et la multiplication par un nombre, on peut calculer des produits scalaires et vectoriels, des normes et des vecteurs normés ainsi que des mesures d'angles définis par des vecteurs.
Cela est utile en géométrie analytique pour déterminer des points, des longueurs, des angles et des distances d'objets géométriques. Cela permet en outre de déterminer facilement l'aire de parallélogrammes et de triangles ainsi que le volume d'un parallélépipède et de plusieurs pyramides.
Pour résoudre des équations avec des vecteurs, il est nécessaire d'élaborer un système d'équations comportant les équations pour les composants individuels.

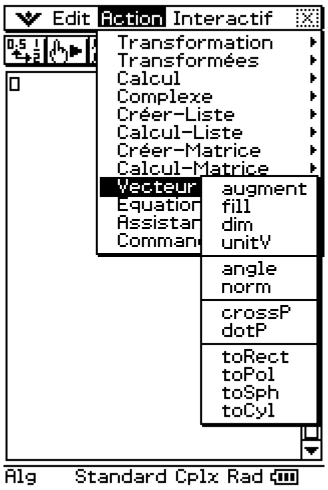
Exemple

Calculez les normes des vecteurs $\overrightarrow{OP}(3;\ 4\ ;\ 5)$ et $\overrightarrow{OQ}(-1;\ 6;\ -2)$.

E étant le plan passant par le point $P(3\ ;4\ ;5)$ et de vecteurs directeur $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Déterminez les coordonnées d'un vecteur normal à E ainsi que la distance du point Q au plan.

Quelle est la mesure de l'angle formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

Entrée de vecteurs

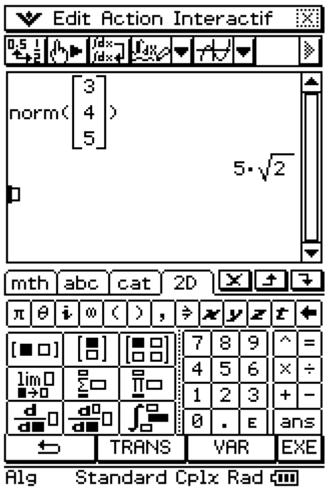


Dans la barre d'icônes, tapez sur <Main> (menu principal) pour afficher le menu principal.

Dans le ClassPad, lorsque les vecteurs ne contiennent pas de symbole d'unité d'angle, ils sont interprétés comme vecteurs d'un espace dans un système de coordonnées cartésiennes.
On peut utiliser aussi bien des vecteurs colonnes que des vecteurs lignes. Les matrices $n \times 1$ représentent des vecteurs colonnes, les matrices $1 \times n$ des vecteurs lignes.

Pour entrer des vecteurs colonnes, on recommande d'utiliser le clavier 2D.

Entrée des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sous forme de vecteur colonne et détermination de sa norme



Pour déterminer la norme d'un vecteur, sélectionnez dans la barre de menus [Action ▸ Vecteur ▸ norm].

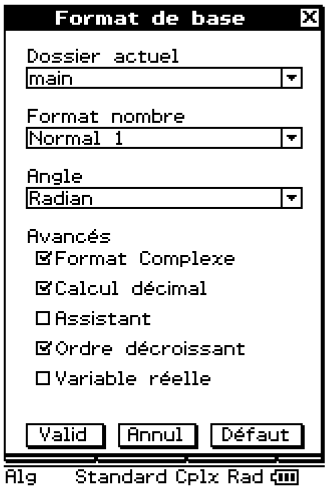
Entrez ensuite les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ sous forme de vecteur colonne.

[Keyboard] 2D [3] [▼] [4] [5] [▶] [ )] [EXE]

Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour norme $\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = 5\sqrt{2}$.

Auteur : Torsten Gebauer

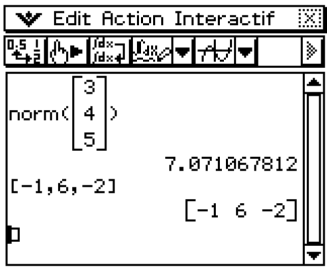
Passage dans le mode décimal



Pour pouvoir afficher les résultats de façon générale dans une écriture à virgule, dans la barre d'icônes tapez sur <Settings> (réglages), dans la barre de menus sélectionnez la configuration [Setup ▸ Format de base] et dans la rubrique Nombres décimaux tapez sur la case de contrôle pour la cocher. Ensuite, tapez sur [Valid].

Lorsque vous tapez alors dans la nouvelle ligne d'entrée et appuyez sur [EXE], vous obtenez la norme $\|\overrightarrow{OP}\| \approx 7{,}071$.

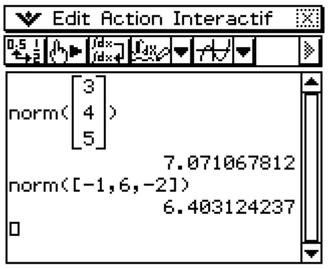
Pour entrer un vecteur ligne sous forme de matrice $1 \times n$, si l'on n'utilise pas le clavier 2D mais des crochets, on n'est plus limité par le nombre de lignes et on peut entrer les coordonnées du vecteur entre deux crochets en les séparant par des virgules.



Entrée des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ sous forme de vecteur ligne et détermination de sa norme

Entrez les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ $\left(1 \ \ 6 \ \ -2\right)$ entre crochets sous la forme d'un vecteur ligne.

[mth] [[ ] [(–)][1] [,] [6] [,] [(–)][2] [ ]] [EXE]



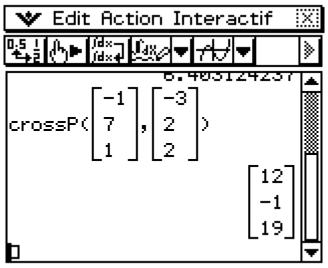
Sélectionnez alors le vecteur ligne dans la ligne de saisie et, pour déterminer sa norme, sélectionnez dans la barre de menus [Interactif ▸ Vecteur ▸ norm].

Le vecteur $\overrightarrow{OQ}(-1; 6; -2)$ a pour norme $\|\overrightarrow{OQ}\| \approx 6{,}403$.

Calcul avec des vecteurs

Les vecteurs peuvent, comme les matrices, être multipliés par des nombres et, s'ils ont le même nombre de ligne et de colonne, être additionnés et soustraits. En utilisant l'élément Vecteur dans le menu Action ou dans le menu Interactif, on peut calculer des produits scalaires ou vectoriels et réaliser d'autres opérations avec des vecteurs.

Pour obtenir un vecteur normal à un plan, on peut former par exemple le produit vectoriel des deux vecteurs du plan.



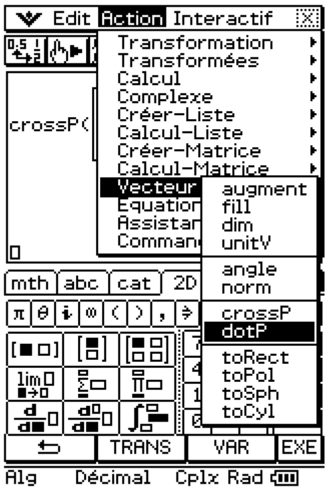
Détermination du produit vectoriel de deux vecteurs

Pour calculer le produit vectoriel $\vec{a} \wedge \vec{b}$, dans la barre de menus sélectionnez [Action ▸ Vecteur ▸ crossP]. Puis, entrez les coordonnées du premier vecteur $\vec{a}$ et les coordonnées du deuxième vecteur $\vec{b}$ en les séparant par une virgule.

2D ▤ [(–)][1] [▼] [7] ▤ [1] [▶] [,]

▤ [(–)][3] [▼] [2] ▤ [2] [▶] [ )] [EXE]

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 19 \end{pmatrix}$$



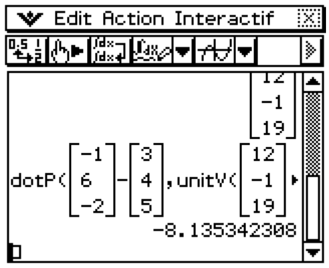
$\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ représente un vecteur normal au plan *E*.

Pour la distance *d* du point *Q* au plan *E*, on a : $d = \left|\overrightarrow{PQ}.\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|$

La fonction « unitV » donne les coordonnées du vecteur normé $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ pour un vecteur $\vec{v}$ non nul donné.

Calcul de la distance du point Q au plan E

Pour calculer le produit scalaire $d = \left|\overrightarrow{PQ}.\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\right|$, dans la barre de menus sélectionnez [Action ▸ Vecteur ▸ dotP]. Puis, entrez le premier vecteur $\overrightarrow{PQ}$ suivie d'une virgule.

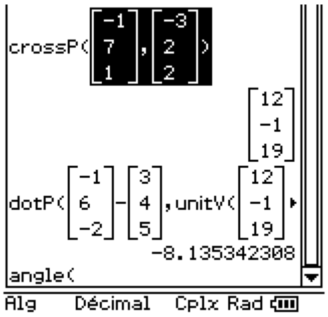


▤ [(–)][1] [▼] [6] ▤ [(–)][2] [▶] [–]

▤ [3] [▼] [4] ▤ [5] [▶] [,]

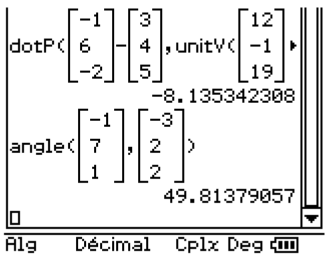
Pour entrer le deuxième facteur $\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, dans la barre de menus sélectionnez [Action ▸ Vecteur ▸ unitV]. Sélectionnez le vecteur $\vec{n}$ dans la ligne de résultat précédente et déplacez-le derrière la parenthèse ouverte à la fin de la nouvelle ligne d'entrée. En tapant [ )] [ )] [EXE], vous terminez la saisie.

La distance du point *Q* au plan *E* est $d \approx 8{,}135$.



Passage dans le mode degré

Pour pouvoir afficher des angles en degré dans les résultats, dans la barre d'icônes tapez sur <Settings> (réglages) et dans la barre de menus sélectionnez ensuite la configuration [Setup ▸ Format de base]. Ici, tapez sur la flèche ▾ sous la rubrique Angle et sélectionnez Degré. Puis, tapez sur [Valid].



Détermination de l'angle entre les deux vecteurs de direction

Pour déterminer une mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dans la barre de menus sélectionnez [Action ▸ Vecteur ▸ angle].
Appuyez sur la touche [Keyboard] pour masquer le clavier logiciel.

Sélectionnez ensuite les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ avec la virgule et la parenthèse fermée dans la troisième ligne d'entrée et déplacez-les dans la nouvelle ligne de saisie derrière la parenthèse. Puis, appuyez sur [EXE].

L'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est de 49,81° environ.

Exercice

Dans un repère du plan orthonormal, les points

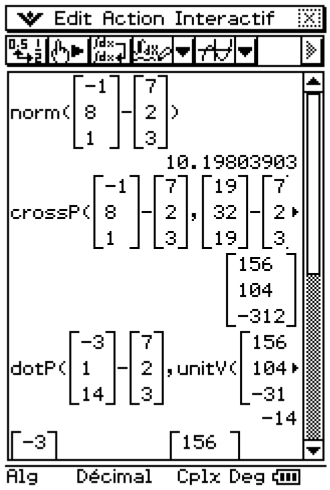
$A(7; 2; 3)$, $B(-1; 8; 1)$, $C(19; 32; 19)$ et $D(-3; 1; 14)$ sont donnés.

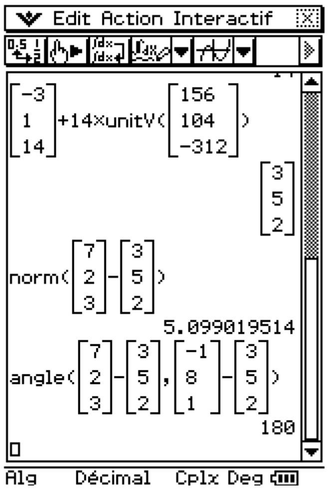
Quelle est la distance entre les points A et B ?

E étant le plan qui contient les points A, B et C.

Déterminez un vecteur normal à E, la distance du point D au point F, intersection entre E et la perpendiculaire à E passant par D.

Déterminez la norme du vecteur $\overrightarrow{FA}$ et une mesure de l'angle formés par les vecteurs $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{FB}$.





Auteur : Torsten Gebauer

Retrouvez cette fiche et d'autres documentations sur
http://www.cornelsen-teachweb.de/co/casio