Suites récurrentes

NIVEAU

Première et Terminale S.

OBJECTIFS

Afficher le tableau de valeurs d'une suite définie par récurrence, la représenter graphiquement. Reconnaître une suite auxiliaire géométrique et trouver l'expression explicite de la première suite.

eActivité CORRESPONDANTE

SUITE1.g1e

Exercice n°1 (SUITE1.g1e):

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

Soit (a_n) une suite définie par $a_0 = -4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_{n+1} = f(a_n)$.

On cherche à étudier la suite(a_n).

1°) Afficher le tableau de valeurs des 14 premiers termes de la suite(a_n).

2°) La suite (a_n) semble-t-elle converger ? Si oui, donner la valeur de la limite.

3°) Représentation graphique.

a) Représenter graphiquement le nuage de points des premiers termes de la suite(a_n).

b) Représenter graphiquement la courbe de la fonction f et tracer les premiers termes de la suite(a_n).

4°) Soit (b_n) une suite définie par $b_n = a_n + 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Afficher le tableau de valeurs des premiers termes de la suite(b_n). Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature de la suite (b_n) ?

b) Soit (c_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Exprimer c_n en fonction de a_n puis calculer les premiers termes de la suite (c_n). Votre conjecture du 4°) a) est-elle confirmée ?

c) Démontrer la conjecture établie à la question précédente.

5°) En déduire l'expression de b_n puis de a_n en fonction de$n$.

6°) Déterminer le limite de la suite (a_n).

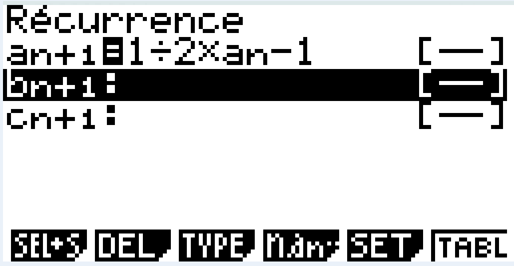
1°) Afficher le tableau de valeurs des 14 premiers termes de la suite(a_n).

Dans le menu général, choisir RECUR (touche 8). Il s'agit d'une suite définie par récurrence (a_{n+1} en fonction de a_n), il faut sélectionner le bon mode de définition :

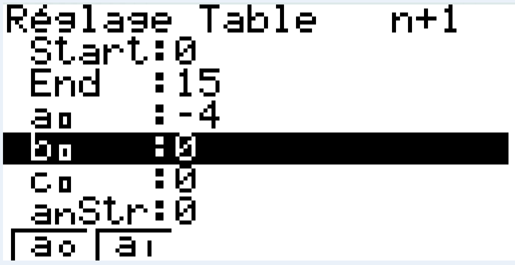
Appuyer sur TYPE (touche F3) puis sélectionner le type de suite :

Dans notre cas c'est F2:an+1=Aan+Bn+C soit la touche an+1 (touche F2)

On entre la suite pour obtenir l'écran suivant :



On va entrer la valeur de a_0 , pour cela il faut appuyer sur SET (touche F5)



On souhaite afficher les valeurs de a_0 jusqu'à a_{15}, ainsi pour Start on entre 0, pour End 15. a0 correspond au premier terme de la suite, donc ici -4.

Puis appuyer sur EXIT et TABL (touche F6).On obtient les valeurs suivantes

n+1	an+1
0	-4
1	-3
2	-2.5
3	-2.25
4	-2.125
5	-2.062
6	-2.031
7	-2.015
8	-2.007
9	-2.003
10	-2.001
11	-2
12	-2
13	-2
14	-2

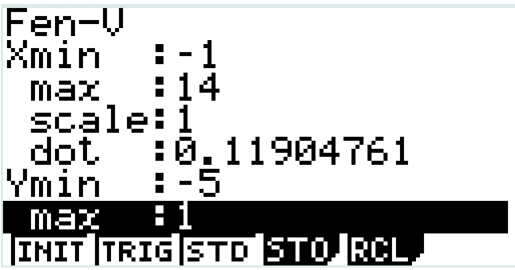
2°) La suite (a_n) semble-t-elle converger ? Si oui, donner la valeur de la limite.

Au vue du tableau de valeurs de la question 1°) la suite (a_n) semble converge vers -2.

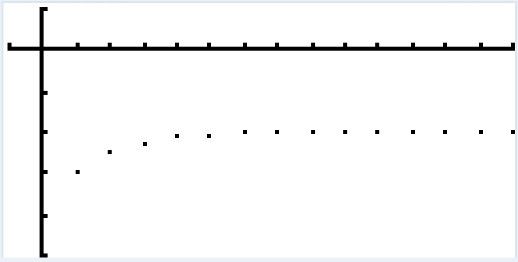
3°) a) Représenter graphiquement le nuage de points des premiers termes de la suite(a_n).

Pour cela on utilise la fonction G·PLT accessible depuis le tableau de valeurs (touche F6).

Pour obtenir un affichage de tous les termes, paramétrer la fenêtre d'affichage (SHIFT F3) de la façon suivante :



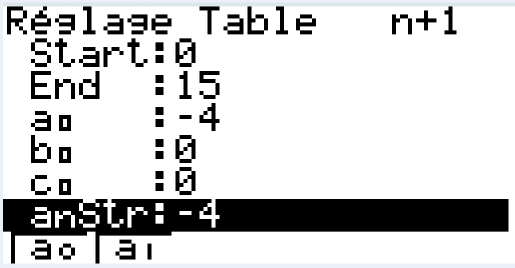
On obtient le graphique suivant :



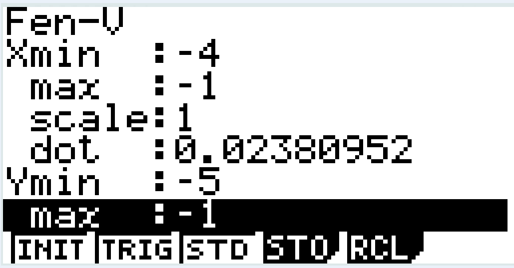
3°) b) Représenter graphiquement la courbe représentant la fonction f et tracer les premiers termes de la suite (a_n).

Pour tracer la courbe représentant la fonction f, ainsi que la droite d'équation $y = x$ pour représenter les premiers termes de la suite, on appuis sur WEB accessible depuis le tableau de valeurs (touche F4).

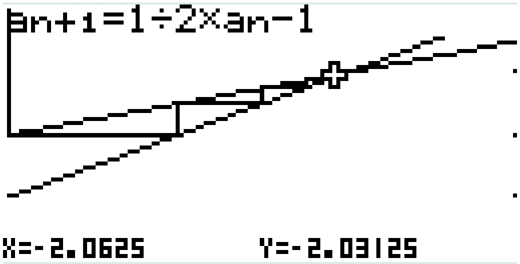
Il faut renseigner le champ anStr qui correspond au premier terme de la suite dans notre représentation graphique, soit a_0. On a ainsi :



Utiliser le paramétrage suivant pour la fenêtre graphique :



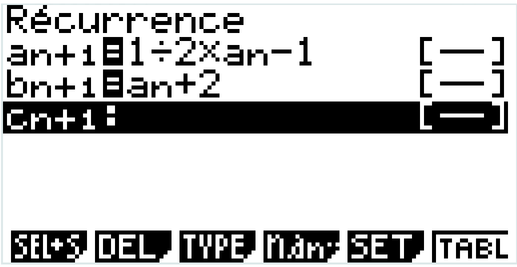
On obtient le graphique suivant :



Noté que les coordonnées (x, y) des points de la courbe ci-dessus correspondent aux couples (a_n, a_{n+1}) , et qu'à chaque fois qu'on appuie sur EXE la valeur de n est incrémentée de 1.

4°) a) Afficher le tableau de valeurs des premiers termes de la suite(b_n). Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature de la suite (b_n) ?

Pour déterminer les premiers termes de la suite (b_n) on va entrer cette suite dans la calculatrice :



Remarque : On ne peut pas exprimer (b_n) en fonction de (a_n), mais seulement b_{n+1} en fonction de (a_n), ce qui entrainera un décalage d'1 indice dans le tableau de valeur entre les valeurs affichée par la calculatrice et les valeurs qu'on devrait obtenir.

On obtient les valeurs suivantes :

n+1	an+1	bn+1
0	-4	0
1	-3	-2
2	-2.5	-1
3	-2.25	-0.5
4	-2.125	-0.25
5	-2.062	-0.125
6	-2.031	-0.062
7	-2.015	-0.031
8	-2.007	-0.015
9	-2.003	-7E-3
10	-2.001	-3E-3
11	-2	-1E-3
12	-2	-9E-4
13	-2	-4E-4
14	-2	-2E-4
15	-2	-1E-4

Au vue du tableau de valeurs précédent, La suite (b_n) semble géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4°) b) Soit (c_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Exprimer c_n en fonction de a_n puis calculer les premiers termes de la suite (c_n). Votre conjecture du 4°) a) est-elle confirmée ?

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}+2}{a_n+2} = \frac{a_{n+1}+2}{a_n+2} = \frac{\frac{1}{2}a_n - 1 + 2}{a_n+2} = \frac{\frac{1}{2}a_n + 1}{a_n+2}$$

Ainsi on peut définir la suite comme on le montre ci-dessous

```
Recursion
an+1=1÷2×an-1      [—]
bn+1=an+2          [—]
cn+1=(1÷2×an+1)÷(an+2)

 n   an   bn   cn
```

Puis appuyer sur EXIT et TABL ou F6 .On obtient les valeurs suivantes

n+1	Cn+1
0	0.5
1	0.5
2	0.5
3	0.5
4	0.5
5	0.5
6	0.5
7	0.5
8	0.5
9	0.5
10	0.5
11	0.5

Au vue de ce tableau de valeurs, la suite (c_n) semble constante égale à $\frac{1}{2}$, ce qui confirme notre conjecture du 4°) b) : « La suite (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ »

4°) c) Démontrer la conjecture établie à la question précédente.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$b_{n+1} = a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}a_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}a_n + 1 = \frac{1}{2}(b_n - 2) + 1 = \frac{1}{2}b_n$$

Ce qui prouve bien que la suite (b_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

5°) En déduire l'expression de $\boldsymbol{b_n}$ puis de $\boldsymbol{a_n}$ en fonction de$\boldsymbol{n}$.

On sait que (b_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $b_n = b_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Calculons b_0 : $b_0 = a_0 + 2 = -4 + 2 = -2$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ $b_n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n - 2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$.

6°) Déterminer le limite de la suite (a_n).

On sait que si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -2$$

Ce qui confirme notre conjecture du 2°).