Etude d'une suite définie par récurrence

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

Calculer les premiers termes de u_n , la représenter graphiquement puis émettre une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.

eActivité CORRESPONDANTE

SUITEPAR.g1e

Exercice n°1 (SUITEPAR.g1e) :

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = -208$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} = u_n - 4n + 40$$

1°) Afficher le tableau de valeurs des 20 premiers termes de la suite.

2°) Représenter graphiquement le nuage de points formé par les 20 premiers termes de la suite. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'expression générale de u_n ?

3°) a) Déterminer l'expression générale de u_n.

b) A l'aide d'une feuille de calcul du tableur de la Graph85, dans la colonne A donner les valeurs de n, puis dans la colonne B les valeurs de u_n.

c) Dans le menu régression de la calculatrice, retrouver le résultat du 3°) a).

4°) Valider le résultat du 3°) en faisant une démonstration par récurrence.

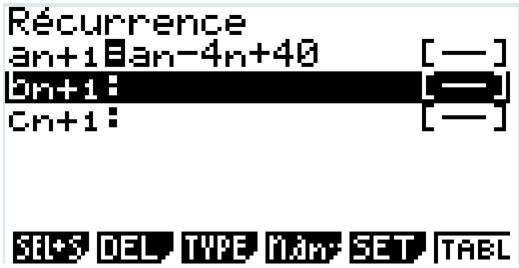
1°) Afficher le tableau de valeurs des 20 premiers termes de la suite.

Dans le menu général, choisir RECUR (touche 8). Il s'agit d'une suite définie par récurrence (a_{n+1} en fonction de a_n), il faut sélectionner le bon mode de définition :

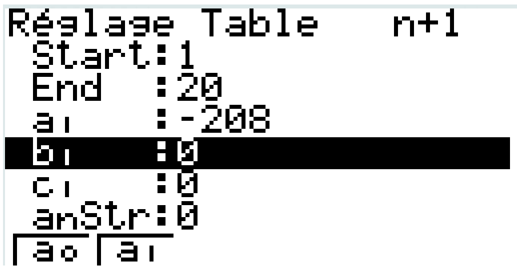
Appuyer sur TYPE (F3) puis sélectionner le type de suite :

Dans notre cas c'est une suite définie par récurrence simple du type F2: an+1=Aan+Bn+C soit la touche an+1 accessible par F2

On entre la suite pour obtenir l'écran suivant :



On va entrer la valeur de a_0 , pour cela il faut appuyer sur SET (touche F5)



Ainsi pour Start on entre 1, pour End 20 car on souhaite calculer les 20 premiers termes de la suite. a1 correspond au premier terme de la suite, donc ici -21.

Noté que pour définir a_1 il faut appuyer sur F2 (par défaut on a a_0).

Puis appuyer sur EXIT et TABL (touche F6) .On obtient les valeurs suivantes

n+1	a_{n+1}
1	-208
2	-172
3	-140
4	-112
5	-88
6	-68
7	-52
8	-40
9	-32
10	-28
11	-28
12	-40
13	-52
14	-68
15	-88
16	-276
17	-112
18	-140
19	-172
20	-208

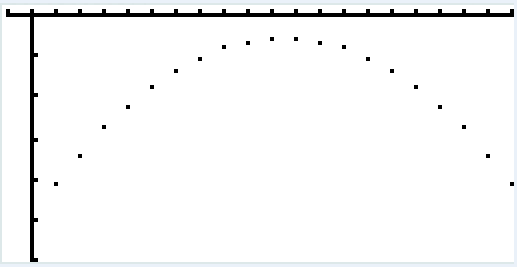
2°) Représenter graphiquement le nuage de points formé par les 20 premiers termes de la suite. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur l'expression générale de u_n ?

Pour représenter le nuage de points formé par les premiers termes de la suite, on utilise la fonction G·PLT (touche F6).

Pour obtenir un affichage de tous les termes, paramétrer la fenêtre d'affichage (SHIFT F3) de la façon suivante :

```
Fen-V
Xmin  :-1
 max  :20
 scale:1
 dot  :0.16666666
Ymin  :-300
 max  :5
INIT TRIG STD STO RCL
```

On obtient le graphique suivant :



On peut conjecturer que la représentation graphique est celle d'une parabole.

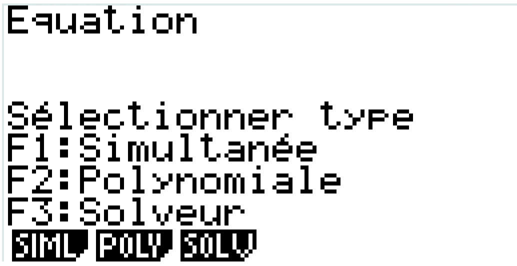
3°) a) Déterminer l'expression générale de u_n.

En utilisant la conjecture précédente, on va rechercher trois réels a, b, et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $u_n = an^2 + bn + c$.Pour déterminer la valeur des trois réels a, b et c, on va résoudre le système suivant :

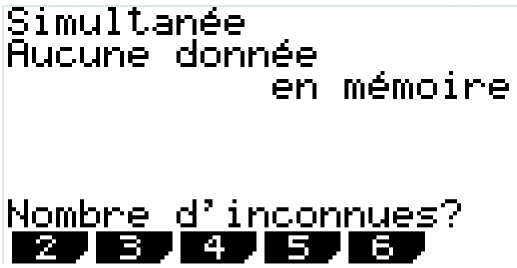
$$\begin{cases} u_1 = a \times 1^2 + b \times 1 + c \\ u_2 = a \times 2^2 + b \times 2 + c \\ u_3 = a \times 3^2 + b \times 3 + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -208 = a + b + c \\ -172 = 4a + 2b + c \\ -140 = 9a + 3b + c \end{cases}$$

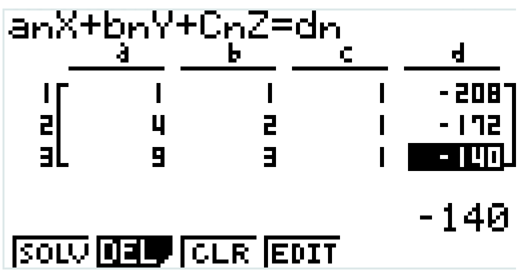
On peut résoudre ce système d'inéquation de plusieurs façons :

Dans le menu sélectionner F1 Simultanée.



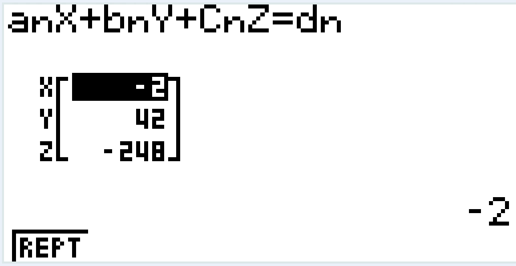
Choisir 3 comme nombre d'inconnues.





Pour résoudre le système, appuyer sur SOLV ou F1.

On obtient les solutions suivantes :



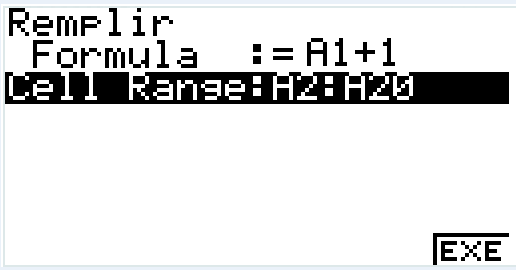
Ainsi les solutions de notre système sont :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 42 \\ c = -248 \end{cases}$$

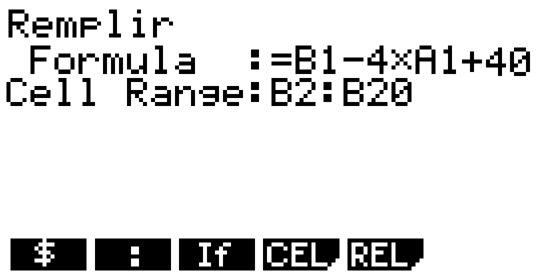
Donc d'après notre conjecture et nos calculs on a $u_n = -2n^2 + 42n - 248$.

3°) b) A l'aide d'uns feuille de calcul, dans la colonne A donner les valeurs de n, puis dans la colonne B les valeurs de u_n.

Dans le menu TABLE, entrer 0 dans la cellule A1 puis appuyer sur EDIT (touche F2) puis sur ▷ (touche F6) puis sur FILL (touche F1). Entrer comme suit :



Puis pour compléter la colonne B, entrer -208 , puis dans le menu FILL, compléter comme suit :

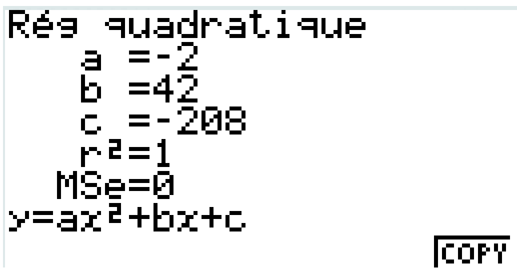


On obtient le même tableau de valeurs que

3°) c) Dans le menu régression de la calculatrice, retrouver le résultat du 3°) a).

Afin de trouver l'expression de u_n en fonction de n, dans le menu CALC, appuyer sur REG puis sur x^2

On obtient les résultats suivant :



Ce qui confirme bien les résultats précédents.

4°) Valider le résultat du 3°) en faisant une démonstration par récurrence.

Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $u_n = -2n^2 + 42n - 248$

Montrons que la proposition est vraie au rang 1 :

On a $u_1 = -208$ et $-2 \times 1^2 + 42 \times 1 - 248 = -208$. Donc la proposition est vraie au rang 1.

Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$:

On sait que $u_{n+1} = u_n - 4n + 40 = -2n^2 + 42n - 248 - 4n + 40$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Ainsi $u_{n+1} = -2n^2 + 38n - 208$.

Or $-2(n+1)^2 + 42(n+1) - 248 = -2n^2 - 4n - 2 + 42n + 42 - 248$

$= -2n^2 + 38n - 208 = u_{n+1}$

La proposition est donc vraie au rang $n + 1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -2n^2 + 42n - 248$