Etude de deux suites associées

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

On définie deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} b_0 \in \mathbb{R} \\ b_{n+1} = \alpha b_n + \beta a_n \end{cases}$$

On cherche à déterminer pour quelles valeurs de α et β ces deux suites convergent.

eActivité CORRESPONDANTE

2SUITES.G1e et 2SUITESb.G1e

Exercice n°1 (2SUITES.g1e):

Dans cet exercice on prendra $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{3}$, $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$

1°) Afficher le tableau de valeurs des 20 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

2°) Représenter graphiquement le nuage de points formé par les 20 premiers termes de la suite. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature des suites (a_n) et (b_n) ?

3°) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Afficher le tableau de valeurs de cette suite. Quelle semble être la nature de la suite (u_n) ? Démontrer votre conjecture, et donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

4°) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

5°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Afficher le tableau de valeurs de cette suite. Quelle semble être la nature de la suite (v_n) ? Démontrer votre conjecture, et donner les éléments caractéristiques de la suite (v_n).

6°) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

7°) Déduire des questions précédentes les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

Exercice n°2 (SUITE1b.g1e):

On définie deux suites (a_n) et (b_n) par :

$$\begin{cases} a_0 \in \mathbb{R} \\ a_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} b_0 \in \mathbb{R} \\ b_{n+1} = \alpha b_n + \beta a_n \end{cases}$$

1°) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n + b_n, n \in \mathbb{N}$.
Quelle est la nature de la suite (u_n) et donner ses éléments caractéristiques.

2°) En déduire l'expression de u_n en fonction de n, α et β.

3°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - b_n, n \in \mathbb{N}$.
Quelle est la nature de la suite (v_n) et donner ses éléments caractéristiques.

4°) En déduire l'expression de v_n en fonction de n, α et β.

5°) Déduire des questions précédentes les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

6°) Quelles conditions doit-on avoir sur les réels α et β pour que les suites (a_n) et (b_n) convergent ?

7°) Représenter graphiquement l'ensemble des points de coordonnées (α, β) tel que les suites (a_n) et (b_n) convergent.

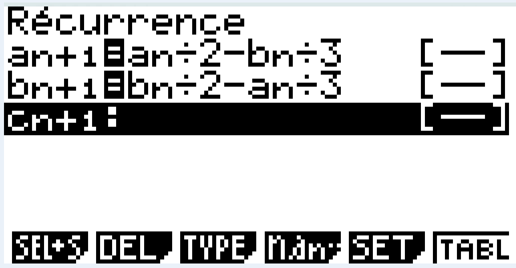
Exercice n°1 (2SUITES.g1e):

Dans cette partie on prendra $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = -\frac{1}{3}$. Donc

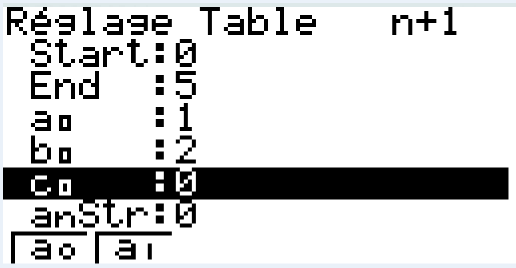
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{3}b_n \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} b_0 = 2 \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{3}a_n \end{cases}$$

1°) Afficher le tableau de valeurs des 20 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).

Dans le menu RECUR on entre l'expression des deux suites récurrentes :



Appuyer sur SET (F5) et paramétrer comme suit :

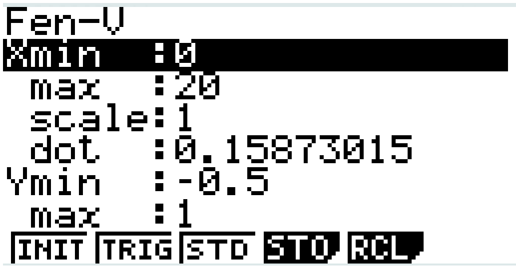


Puis revenez à l'écran précédent en appuyant sur EXIT puis sur TABL (F6). On obtient les tableaux de valeurs suivant :

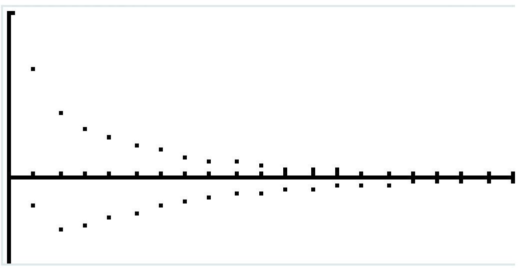
n+1	an+1	bn+1
0	1	2
1	-0.166	0.6666
2	-0.305	0.3888
3	-0.282	0.2962
4	-0.239	0.2422
5	-0.2	0.2011
6	-0.167	0.1674
7	-0.139	0.1395
8	-0.116	0.1162
9	-0.096	0.0969
10	-0.08	0.0807
11	-0.067	0.0672
12	-0.056	0.056
13	-0.046	0.0467
14	-0.038	0.0389
15	-0.032	0.0324
16	-0.027	0.027
17	-0.022	0.0225
18	-0.018	0.0187
19	-0.015	0.0156
20	-0.013	0.013

2°) Représenter graphiquement le nuage de points formé par les 20 premiers termes de la suite. Quelle conjecture pouvez-vous faire sur la nature des suites (a_n) et (b_n) ?

Après avoir affiché les tableaux de valeurs des deux suites, appuyer sur SHIFT F3 pour modifier la fenêtre d'affichage comme suit :



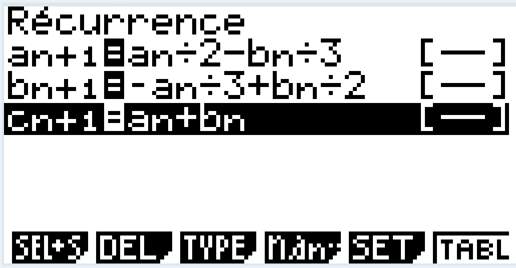
Revenez au tableau de valeurs en appuyant sur EXIT puis appuyer sur G·PLT pour afficher le nuage de points :



Les suites (a_n) et (b_n) semblent converger vers 0.

3°) Soit (u_n) la suite définie par $u_n = a_n + b_n, n \in \mathbb{N}$. Afficher le tableau de valeurs de cette suite. Quelle semble être la nature de la suite (u_n) ? Démontrer votre conjecture, et donner les éléments caractéristiques de la suite (u_n).

On entre l'expression de la suite (u_n) comme suit (pour la calculatrice, ce sera la suite (c_n)) :



Remarque : Ici u_n correspondra à c_{n+1}

On affiche le tableau de valeurs en appuyant sur TABL (F6).

n+1	an+1	bn+1	cn+1
1	-0.166	0.6666	3
2	-0.305	0.3888	0.5
3	-0.282	0.2962	0.0833

La suite (u_n) semble géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

Démontrons le : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n - \frac{1}{3}a_n$

$$= \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{6}b_n = \frac{1}{6}(a_n + b_n) = \frac{1}{6}u_n$$

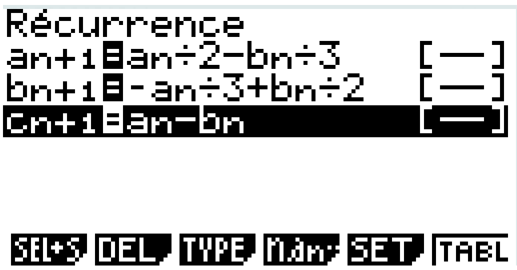
Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $u_0 = 3$

4°) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n$

5°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - b_n, n \in \mathbb{N}$. Afficher le tableau de valeurs de cette suite. Quelle semble être la nature de la suite (v_n) ? Démontrer votre conjecture, et donner les éléments caractéristiques de la suite (v_n).

On entre l'expression de la suite (v_n) comme suit (pour la calculatrice, ce sera la suite (c_n)) :

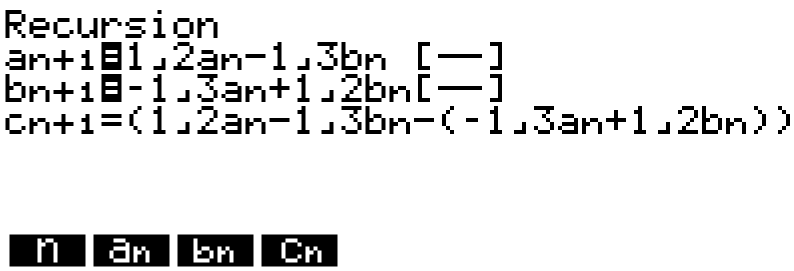


Remarque : Ici v_n correspondra à c_{n+1}

On affiche le tableau de valeurs en appuyant sur TABL (F6).

La suite (v_n) semble géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

Remarque : Lorsqu'une suite est géométrique, il n'est pas toujours évident, à partir de son tableau de valeurs, de le remarquer. Dans ce cas on peut afficher le tableau de valeurs de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ qui devra être constant et égal à la raison si la suite (v_n) est géométrique : Définissons la suite $c_{n+1} = \frac{v_{n+1}}{v_n}$:



Le tableau de valeurs nous donne :

n+1	an+1	bn+1	cn+1
1	-0.166	0.6666	0.8333
2	-0.305	0.3888	0.8333
3	-0.282	0.2962	0.8333

On constate bien que la suite (c_n) est constante égale à 0,833 soit $\frac{5}{6}$ ce qui confirme que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

Démontrons le : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - \frac{1}{3}b_n - \left(\frac{1}{2}b_n - \frac{1}{3}a_n\right)$

$= \frac{5}{6}a_n - \frac{5}{6}b_n = \frac{5}{6}(a_n - b_n) = \frac{5}{6}v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $v_0 = -1$

6°) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\left(\frac{5}{6}\right)^n$

7°) Déduire des questions précédentes les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

$$\begin{cases} u_n = 3\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ v_n = -\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n + b_n = 3\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ a_n - b_n = -\left(\frac{5}{6}\right)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \\ b_n = \frac{1}{2}\left(3\left(\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{5}{6}\right)^n\right) \end{cases}$$

Exercice n°2 (SUITE1b.g1e):

1°) Soit $(\boldsymbol{u_n})$ la suite définie par $\boldsymbol{u_n = a_n + b_n, n} \in \mathbb{N}$.
Quelle est la nature de la suite $(\boldsymbol{u_n})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n + \alpha b_n + \beta a_n$
$= (\alpha + \beta)(a_n + b_n) = (\alpha + \beta)u_n$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $\alpha + \beta$ et de premier terme $u_0 = a_0 + b_0$

2°) En déduire l'expression de $\boldsymbol{u_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0(\alpha + \beta)^n = (a_0 + b_0)(\alpha + \beta)^n$

3°) Soit $(\boldsymbol{v_n})$ la suite définie par $\boldsymbol{v_n = a_n - b_n, n} \in \mathbb{N}$.
Quelle est la nature de la suite $(\boldsymbol{v_n})$ et donner ses éléments caractéristiques.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \alpha a_n + \beta b_n - \alpha b_n - \beta a_n$
$= (\alpha - \beta)(a_n - b_n) = (\alpha - \beta)v_n$

Donc la suite (v_n) est géométrique de raison $\alpha - \beta$ et de premier terme $v_0 = a_0 - b_0$

4°) En déduire l'expression de $\boldsymbol{v_n}$ en fonction de $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0(\alpha - \beta)^n = (a_0 - b_0)(\alpha - \beta)^n$

5°) Déduire des questions précédentes les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = (a_0 + b_0)(\alpha+\beta)^n \\ v_n = (a_0 - b_0)(\alpha-\beta)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n + b_n = (a_0 + b_0)(\alpha+\beta)^n \\ a_n - b_n = (a_0 - b_0)(\alpha-\beta)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\left((a_0+b_0)(\alpha+\beta)^n + (a_0-b_0)(\alpha-\beta)^n\right) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\left((a_0+b_0)(\alpha+\beta)^n - (a_0-b_0)(\alpha-\beta)^n\right) \end{cases}$$

6°) Quelles conditions doit-on avoir sur les réels α et β pour que les suites (a_n) et (b_n) convergent ?

Si $\begin{cases} -1 < \alpha+\beta < 1 \\ -1 < \alpha-\beta < 1 \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha+\beta)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha-\beta)^n = 0$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$

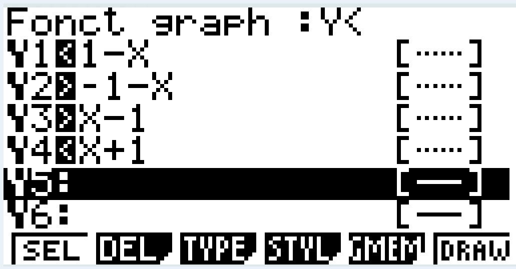
7°) Représenter graphiquement l'ensemble des points de coordonnées (α, β) tel que les suites (a_n) et (b_n) convergent.

Les conditions $\begin{cases} -1 < \alpha+\beta < 1 \\ -1 < \alpha-\beta < 1 \end{cases}$ peuvent aussi s'écrire $\begin{cases} \alpha+\beta < 1 \\ \alpha+\beta > -1 \\ \alpha-\beta < 1 \\ \alpha-\beta > -1 \end{cases}$

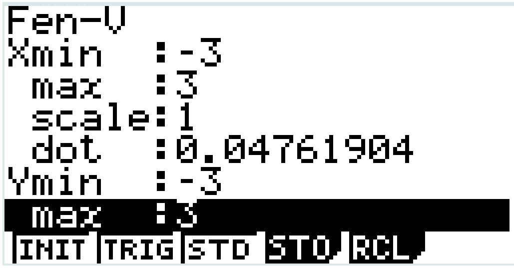
Soit $\begin{cases} \beta < 1-\alpha \\ \beta > -1-\alpha \\ \beta > \alpha-1 \\ \beta < \alpha+1 \end{cases}$. Représentons graphiquement cet ensemble de points :

Dans le menu GRAPH, sélectionner TYPE (touche F3), puis ▷ (touche F6) puis Y< (touche F2) et entrer Y1<1-X [·····]

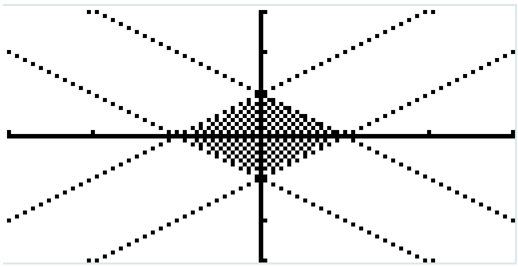
Entrer les autres inéquations pour obtenir



Choisir une fenêtre graphique appropriée comme ci-dessous :



On obtient le graphique suivant :



Cette représentation graphique nous permet de bien visualiser l'ensemble des couples (α, β) tels que les suites (a_n) et (b_n) convergent.