# Vitesse de convergence de suites

## NIVEAU

Terminale S.

## OBJECTIFS

On va étudier à travers des exemples, la vitesse de convergence de suites. On procédera tout d'abord par une approche expérimentale avec la Graph85 puis nous aurons recours aux calculs mathématiques dans un second temps.

## eActivité CORRESPONDANTE

**VITESSE1.g1e**

**Exercice n°1 (VITESSE1.g1e):**

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x \in [0;+\infty[$.

1°) Calculer les 20 premiers termes de la suite $(u_n)$. Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence de la suite et sa monotonie ?

2°) Représenter graphiquement $C_f$, la courbe représentant la fonction $f$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que les premiers termes de la suite. Votre conjecture se confirme-t-elle ?

3°) a) Etudier les variations de la fonction $f$.

b) Vérifier à l'aide de la calculatrice que pour tout $x \in [0;3]$, $f(x) \in [0;3]$, puis démontrer cette proposition.

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;3]$.

d) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$

e) En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

f) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. On notera $\Phi$ sa limite.


CASIO
www.casio-education.fr

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{1+\Phi}|u_n - \Phi|$

5°) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \Phi| \leq (3 - \Phi)\left(\frac{1}{1+\Phi}\right)^n$

6°) Montrer que $\frac{1}{1+\Phi} = 2 - \Phi$ en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \Phi| \leq (3 - \Phi)(2 - \Phi)^n$$

7°) A partir de quel entier $p$, $u_p$ est une valeur approchée de $\Phi$ à $10^{-8}$ près ? Donner alors cette valeur approchée.

8°) On définie la suite $b_n = \frac{u_{n+1}-\Phi}{u_n - \Phi}$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite $k$.

Le résultat précédent permet d'affirmer que la suite $(u_n)$ converge linéairement.

$k$ est appelé la vitesse de convergence.

## SOLUTION

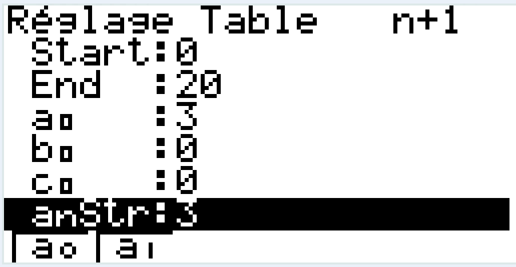
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$$

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}, x \in [0; +\infty[$.

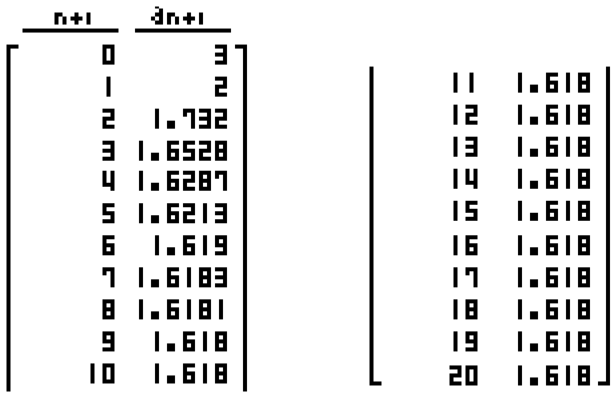
**1°) Calculer les 20 premiers termes de la suite $(u_n)$. Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence de la suite et sa monotonie ?**

Dans le menu RECUR, entrer l'expression de la suite :


Il faut entrer aussi la valeur initiale de la suite puis indiquer à la Graph85 qu'on souhaite l'affichage des valeurs de $u_0$ à $u_{20}$ : Appuyer sur SET (touche F5)




Noté qu'on donne la valeur de 3 à anStr (cela aura son importance pour le graphique qui suit).
Appuyer sur EXIT puis sur TABL (touche F6). On obtient le résultat suivant :



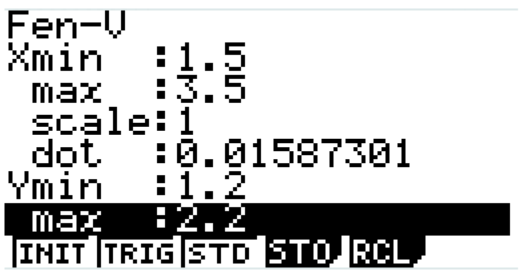
| n+1 | an+1 |
|---|---|
| 0 | 3 |
| 1 | 2 |
| 2 | 1.732 |
| 3 | 1.6528 |
| 4 | 1.6287 |
| 5 | 1.6213 |
| 6 | 1.619 |
| 7 | 1.6183 |
| 8 | 1.6181 |
| 9 | 1.618 |
| 10 | 1.618 |
| 11 | 1.618 |
| 12 | 1.618 |
| 13 | 1.618 |
| 14 | 1.618 |
| 15 | 1.618 |
| 16 | 1.618 |
| 17 | 1.618 |
| 18 | 1.618 |
| 19 | 1.618 |
| 20 | 1.618 |

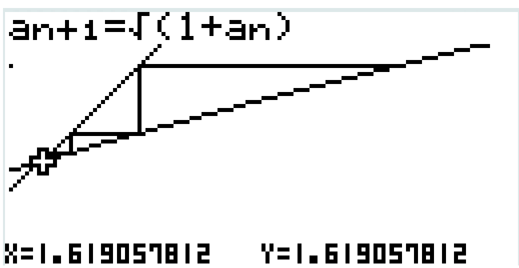
La suite $(u_n)$ semble converger ver un réel proche de 1,618033989 (les valeurs de $u_{19}$ et $u_{20}$ sont égales à $10^{-9}$ près.

**2°) Représenter graphiquement $C_f$, la courbe représentant la fonction $f$, la droite d'équation $y = x$ ainsi que les premiers termes de la suite. Votre conjecture se confirme-t-elle ?**

Après avoir afficher le tableau de valeurs de la suite, appuyer sur WEB (touche F4) pour afficher la représentation graphique demandée.

On utilisera la fenêtre d'affichage suivante (par exemple) :




Précédemment on a pris 3 pour valeur de anStr, cela signifie que le premier terme de la suite pour construire ce graphique sera 3 (qui correspond à $u_0$)

**3°) a) Etudier les variations de la fonction $f$.**

La fonction $x \mapsto 1 + x$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ car c'est une fonction polynôme, de plus elle est positive stricte sur $[0; +\infty[$, donc $f$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et pour tout $x \in [0; +\infty[$ on a :

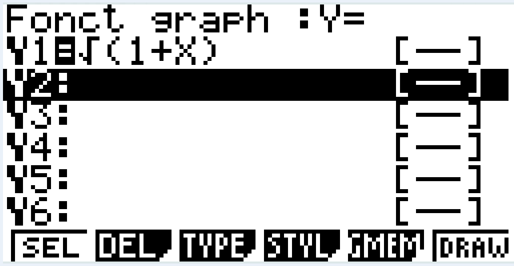
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$$

Ainsi pour tout $x \in [0; +\infty[$ $f'(x) > 0$, $f$ est donc croissante sur $[0; +\infty[$.

**3°) b) Vérifier à l'aide de la calculatrice que pour tout $x \in [0; 3]$, $f(x) \in [0; 3]$, puis démontrer cette proposition.**

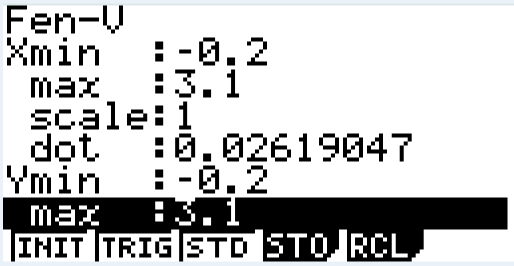
Pour vérifier cette propriété, on va tracer la courbe représentative de $f$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

Dans le menu GRAPH, entrer la fonction comme suit :

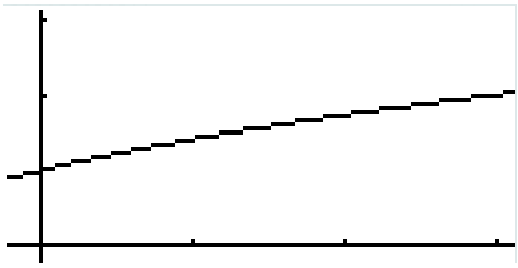



On va utiliser une fenêtre graphique adéquate.

Pour cela appuyer sur V-Window F3 ( SHIFT F3 ) et utiliser le paramétrage suivant :




On obtient la représentation graphique suivante :



On constate bien que pour tout $x \in [0; 3]$, $f(x) \in [0; 3]$.

Démontrons maintenant la proposition :

On sait que $f$ est croissante sur $[0; +\infty[$ donc pour tout $x \in [0; 3]$,
$f(0) \leq f(x) \leq f(3)$ soit $1 \leq f(x) \leq 2$ donc , $f(x) \in [0; 3]$.

**3°) c) Montrons par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n} \in [\mathbf{0}; \mathbf{3}]$**

Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :
On a $u_0 = 3$ ainsi $u_0 \in [0; 3]$. La proposition est vraie au rang 0.
Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ :
On sait d'après l'hypothèse de récurrence que $u_n \in [0; 3]$ donc d'après b) on a $f(u_n) \in [0; 3]$ or $u_{n+1} = f(u_n)$ donc $u_{n+1} \in [0; 3]$
La proposition est donc vraie au rang $n + 1$
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ , $u_n \in [0; 3]$.

**3°) d) Montrons par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$**

Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :
On a $u_0 = 3$ de plus $u_1 = \sqrt{1 + u_0} = 2$. Ainsi $u_0 \leq u_1$
Donc la proposition est vraie au rang 0.
Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ :

On sait d'après l' l'hypothèse de récurrence que $u_{n+1} \leq u_n$ de plus d'après c) $u_n \in [0;3]$ et $f$ est croissante sur $[0;3]$ donc : $f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$ soit $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ,$u_{n+1} \leq u_n$.

**3°) e) En déduire que la suite $(u_n)$ converge.**

D'après c) la suite $(u_n)$ est minorée par 0, de plus d'après d) elle est décroissante. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)$ est convergente.

**3°) f) Déterminer la limite de la suite $(u_n)$. On notera $\Phi$ sa limite.**

On sait que :

pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;3]$

$(u_n)$ converge vers $l$, donc $l \in [0;3]$

pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

$f$ est dérivable sur $[0;3]$ donc $f$ est continue sur $[0;3]$.

Donc d'après le cours $l$ vérifie $l = f(l) \Leftrightarrow l = \sqrt{1+l} \Leftrightarrow l^2 = 1 + l$ car les deux membres sont positifs. D'où $l^2 - l - 1 = 0 \Leftrightarrow l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Or $l \in [0;3]$

donc $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Conclusion : La suite $(u_n)$ converge vers $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

**4°) Montrer que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$ $|\boldsymbol{u_{n+1}} - \boldsymbol{\Phi}| \leq \frac{1}{1+\Phi}|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\Phi}|$**

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$|u_{n+1} - \Phi| = \left|\sqrt{1 + u_n} - \sqrt{1 + \Phi}\right| \text{ (rappelons que } \sqrt{1 + \Phi} = \Phi)$$

$$= \left|\frac{1 + u_n - 1 - \Phi}{\sqrt{1 + u_n} + \sqrt{1 + \Phi}}\right| = \left|\frac{u_n - \Phi}{\sqrt{1 + u_n} + \Phi}\right|$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \geq 0$ donc $\sqrt{1 + u_n} \geq 1$ ainsi $\frac{1}{\sqrt{1+u_n}+\Phi} \leq \frac{1}{1+\Phi}$. Ce qui prouve que $\left|\frac{u_n - \Phi}{\sqrt{1 + u_n} + \Phi}\right| \leq \frac{1}{1 + \Phi}|u_n - \Phi|$ d'où $|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{1 + \Phi}|u_n - \Phi|$

*Définition : Le résultat précédent permet d'affirmer que la suite $(u_n)$ converge linéairement. $\frac{1}{1+\Phi}$ est appelé la vitesse de convergence.*

**5°) En déduire par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, $|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\Phi}| \leq (\boldsymbol{3} - \boldsymbol{\Phi})\left(\frac{1}{1+\Phi}\right)^{\boldsymbol{n}}$**

Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :

On a $u_0 = 3$ donc $|u_0 - \Phi| = |3 - \Phi|$. On a bien $|u_0 - \Phi| \leq (3 - \Phi)\left(\frac{1}{1+\Phi}\right)^0$

Donc la proposition est vraie au rang 0.

Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$ :

D'après 4°) on sait que $|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{1+\Phi}|u_n - \Phi|$ or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $|u_n - \Phi| \leq (3 - \Phi)\left(\frac{1}{1+\Phi}\right)^n$ ainsi l'inégalité devient :

$$|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{1 + \Phi}(3 - \Phi)\left(\frac{1}{1 + \Phi}\right)^n \Leftrightarrow |u_{n+1} - \Phi| \leq (3 - \Phi)\left(\frac{1}{1 + \Phi}\right)^{n+1}$$

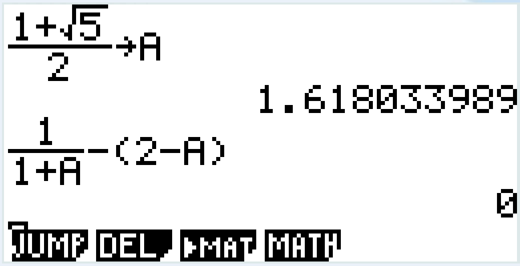
La proposition est donc vraie au rang $n + 1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ,$|u_n - \Phi| \leq (3 - \Phi)\left(\frac{1}{1+\Phi}\right)^n$.

**6°) Montrer que $\frac{1}{1+\Phi} = \boldsymbol{2} - \boldsymbol{\Phi}$ en déduire que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$**

$$|\boldsymbol{u_n} - \boldsymbol{\Phi}| \leq (\boldsymbol{3} - \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{2} - \boldsymbol{\Phi})^{\boldsymbol{n}}$$

On peut tout d'abord vérifier l'égalité à l'aide de la calculatrice :




Ce qui confirme l'égalité. Démontrons la :

On a $\frac{1}{1+\Phi} - (2-\Phi) = \frac{1-(2-\Phi)(1+\Phi)}{(1+\Phi)} = \frac{1-2+\Phi-2\Phi+\Phi^2}{(1+\Phi)}$

$$= \frac{-1-\Phi+\Phi^2}{(1+\Phi)} = 0 \text{ car } \Phi^2 = \Phi + 1$$

Ainsi $\frac{1}{\Phi+1} = 2 - \Phi$

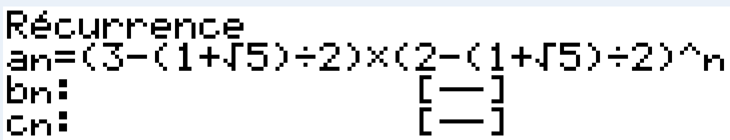
On en déduit facilement grâce à 5°) que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \Phi| \leq (3 - \mathit{\Phi})(2 - \Phi)^n$$

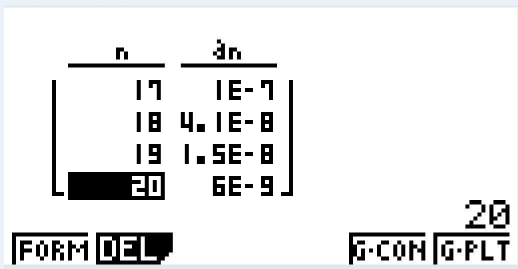
**7°) A partir de quel entier $p$, $u_p$ est une valeur approchée de $\Phi$ à $10^{-8}$ près ? Donner alors cette valeur approchée.**

On peut utiliser la calculatrice pour rechercher cet entier. Affichons le tableau de valeur de la suite de terme général $(3-\mathit{\Phi})(2-\Phi)^n$

Dans le menu RECUR cliquer sur TYPE (touche F3) et choisir an (touche F1) puis entrer le terme général de la suite.




Puis appuyer sur TABL (touche F6).

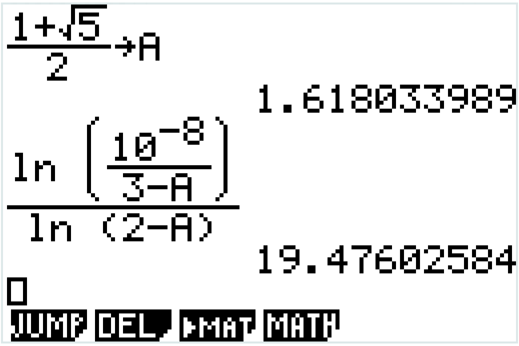


Ainsi à partir de $p = 20$, $u_p$ est une valeur approchée de $\Phi$ à $10^{-8}$ près

Par le calcul on a : $(3 - \Phi)(2 - \Phi)^n \leq 10^{-8} \Leftrightarrow (2 - \Phi)^n \leq \frac{10^{-8}}{(3-\Phi)}$ les deux membres sont positifs donc

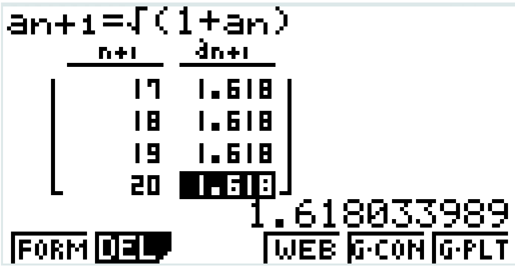
$n \ln(2 - \Phi) \leq \ln\left(\frac{10^{-8}}{(3-\Phi)}\right)$ soit $n \geq \ln\frac{\left(\frac{10^{-8}}{(3-\Phi)}\right)}{\ln(2-\Phi)}$

On trouve



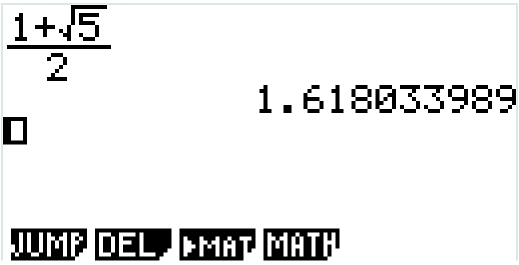

Soit $p = 20$.

On obtient




Soit 1,618033989 comme valeur approché de $\Phi$ à $10^{-8}$ près.

On peut le vérifier en calculant $\Phi$ :



**8°) On définie la suite $\boldsymbol{b_n = \frac{u_{n+1}-\Phi}{u_n-\Phi}}$, $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite $\boldsymbol{k}$.**

En définissant la suite $(b_n)$ :

```
Récurrence
an+1=√(1+an)          [—]
bn+1=(√(1+an)-(1+√5)÷2)÷(an-(1+√5)÷2)
cn+1:                 [—]
```

Noté que pour $a_{n+1}$ on a pris $\sqrt{a_n + 1}$ ce qui est identique. En affichant son tableau de valeur on trouve :

| n+1 | an+1 | bn+1 |
|---|---|---|
| 16 | 1.618 | 0.309 |
| 17 | 1.618 | 0.309 |
| 18 | 1.618 | 0.309 |
| 19 | 1.618 | 0.309 |

19

FORM DEL WEB G·CON G·PLT

Donc la suite $(b_n)$ semble converger.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ,

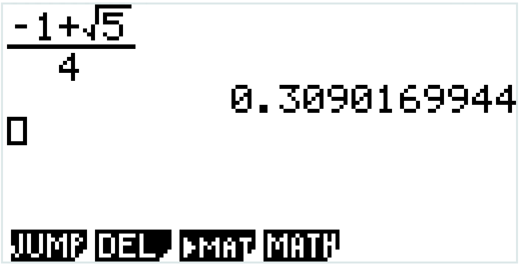
$$b_n = \frac{u_{n+1} - \Phi}{u_n - \Phi} = \frac{\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\Phi}}{u_n - \Phi} = \frac{1 + u_n - 1 - \Phi}{(u_n - \Phi)\left(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\Phi}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+u_n} + \Phi}$$

$$\text{Or } \lim_{n\to+\infty} u_n = \Phi \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+u_n} + \Phi} = \frac{1}{\sqrt{1+\Phi} + \Phi} = \frac{1}{2\Phi}$$

Conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = \frac{1}{2\Phi} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$




Ce qui confirme bien ce qu'on avait pu constater dans le tableau de valeurs de la suite $(b_n)$.