Vitesse de convergence de suites

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

On va étudier à travers des exemples, la vitesse de convergence de suites. On procédera tout d'abord par une approche expérimentale avec la Graph85 puis nous aurons recours aux calculs mathématiques dans un second temps.

La suite dont on va étudier la convergence, converge quadratiquement. Nous allons à travers son étude montrer qu'avec le septième terme de la suite obtenir une valeur approchée à 10^{-50} près de sa limite.

eActivité CORRESPONDANTE

VITESSE2.g1e

Exercice n°2 (VITESSE2.g1e):

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 1}{2v_n - 1} \end{cases}$$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}, x \in \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

1°) Calculer les 20 premiers termes de la suite (v_n). Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence de la suite et sa monotonie ?

2°) Représenter graphiquement C_f, la courbe représentant la fonction f, la droite d'équation $y = x$ ainsi que les premiers termes de la suite. Votre conjecture se confirme-t-elle ?

3°) a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Vérifier à l'aide de la calculatrice que pour tout $x \in [\Phi; 2]$, $f(x) \in [\Phi; 2]$, puis démontrer cette proposition.

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \in [\Phi; 2]$.

d) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} \leq v_n$.

e) En déduire que la suite (v_n) converge.

f) Déterminer la limite de la suite (v_n).

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|v_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|v_n - \Phi|^2$

5°) En déduire que par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|v_n - \Phi| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n-1}-1} (2-\Phi)^{2^{n-1}}$$

6°) A partir de quel entier p, v_p est une valeur approchée de Φ à 10^{-8} près ? Même question à 10^{-50} près ?

7°) On définie la suite $b_n = \frac{v_{n+1}-\Phi}{(v_n-\Phi)^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite k.

Le résultat précédent permet d'affirmer que la suite (u_n) converge quadratiquement.

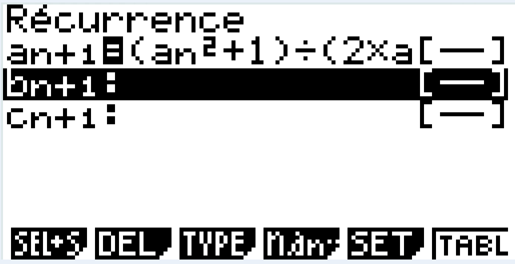
SOLUTION

$$\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n^2 + 1}{2v_n - 1} \end{cases}$$

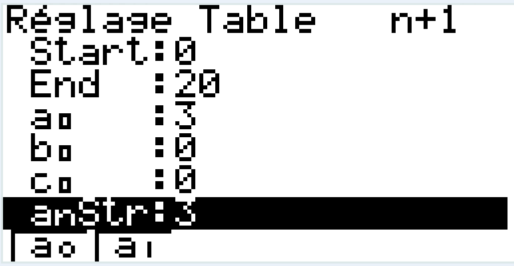
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$, $x \in]\frac{1}{2}; +\infty[$.

1°) Calculer les 20 premiers termes de la suite (v_n). Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence de la suite et sa monotonie ?

Dans le menu RECUR, entrer l'expression de la suite :



Il faut entrer aussi la valeur initiale de la suite puis indiquer à la Graph85 qu'on souhaite l'affichage des valeurs de u_0 à u_{20} : Appuyer sur SET (F5)



Appuyer sur EXIT puis sur TABL (F6). On obtient le résultat suivant :

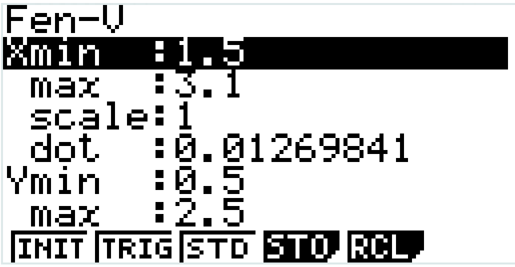
n+1	an+1
0	3
1	2
2	1.6666
3	1.619
4	1.618
5	1.618
6	1.618
7	1.618
8	1.618
9	1.618
10	1.618
11	1.618
12	1.618
13	1.618
14	1.618
15	1.618
16	1.618
17	1.618
18	1.618
19	1.618
20	1.618

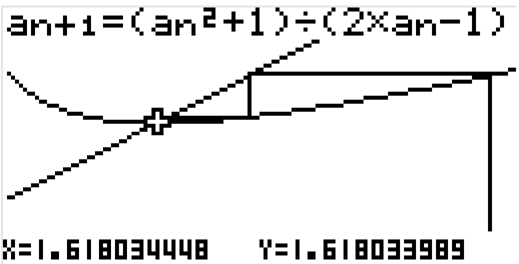
La suite (v_n) semble converger ver un réel proche de 1,618033989 (les valeurs de u_5 à u_{20} sont égales à 10^{-9} près.)

2°) Représenter graphiquement $\boldsymbol{C_f}$, la courbe représentant la fonction $\boldsymbol{f}$, la droite d'équation $\boldsymbol{y = x}$ ainsi que les premiers termes de la suite. Votre conjecture se confirme-t-elle ?

Après avoir afficher le tableau de valeurs de la suite, appuyer sur WEB (F4) pour afficher la représentation graphique demandée.

On utilisera la fenêtre d'affichage suivante (par exemple) :





3°) a) Etudier les variations de la fonction f.

f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ car une fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition et pour tout $x \in \left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ on a :

$$f'(x) = \frac{2x(2x-1)-(x^2+1)\times 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-2}{(2x-1)^2} = \frac{2(x^2-x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(x-\Phi)(x-\Phi')}{(2x-1)^2}, \qquad \text{avec} \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi pour tout $x \in \left]\frac{1}{2};\Phi\right[$ $f'(x) < 0$, f est donc décroissante sur $\left]\frac{1}{2};\Phi\right[$.

et pour tout $x \in]\Phi;+\infty[$ $f'(x) > 0$, f est donc croissante sur $]\Phi;+\infty[$.

x	$\frac{1}{2}$		Φ		$+\infty$
signe de f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	Φ	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(\Phi) = \frac{\Phi^2+1}{2\Phi-1} \quad \text{or} \quad \Phi(2\Phi-1) = 2\Phi^2-\Phi = 2(\Phi+1)-\Phi = \Phi+1 = \Phi^2$$

Donc $f(\Phi) = \dfrac{\Phi^2+1}{2\Phi-1} = \Phi$

3°) b) Vérifier à l'aide de la calculatrice que pour tout $x \in [\Phi; 2]$, $f(x) \in [\Phi; 2]$, puis démontrer cette proposition.

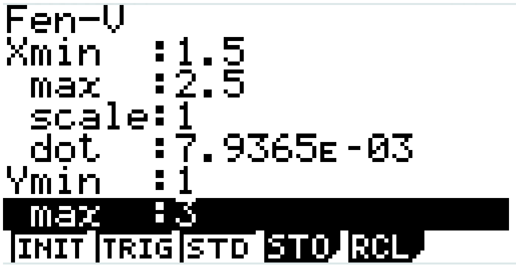
Pour vérifier cette propriété, on va tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[\Phi; 2]$.

Dans le menu GRAPH, entrer la fonction comme suit :

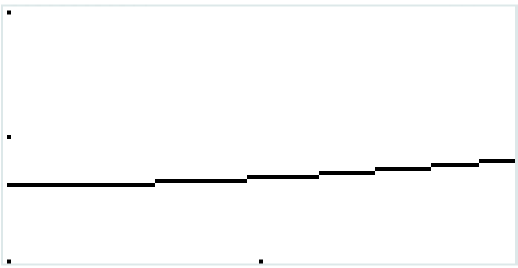
On va utiliser une fenêtre graphique adéquate.

Pour cela appuyer sur 

(SHIFT F3) et utiliser le paramétrage suivant :



On obtient la représentation graphique suivante :



On constate bien que pour tout $x \in [\Phi; 2]$, $f(x) \in [\Phi; 2]$.

Démontrons maintenant la proposition : On sait que f est décroissante sur $[\Phi; 2]$. Donc si $2 \leq x \leq \Phi$ on a $f(\Phi) \leq f(x) \leq f(2)$ d'où $\Phi \leq f(x) \leq \frac{5}{3} \leq 2$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) c) Montrer par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{v_n} \in [\boldsymbol{\Phi}; \boldsymbol{2}]$.

Montrons que la proposition est vraie au rang 1 :

On a $v_1 = \frac{10}{5} = 2$ ainsi $v_1 \in [\Phi; 2]$. La proposition est vraie au rang 1.

Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$:

On sait que $v_n \in [\Phi; 2]$ donc d'après b) $f(v_n) \in [\Phi; 2]$ or $v_{n+1} = f(v_n)$ donc $v_{n+1} \in [\Phi; 2]$

La proposition est donc vraie au rang $n + 1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in [\Phi; 2]$.

3°) d) Montrer par récurrence que pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{v_{n+1}} \leq \boldsymbol{v_n}$.

Montrons que la proposition est vraie au rang 1 :

On a $v_1 = 2$ et $v_2 = \frac{5}{3}$. Ainsi $v_2 \leq v_1$

Donc la proposition est vraie au rang 1.

Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$:

On sait d'après l' l'hypothèse de récurrence que $v_{n+1} \leq v_n$ de plus d'après c) $v_n \in [\Phi; 2]$ et f est croissante sur $[\Phi; 2]$donc : $f(v_{n+1}) \leq f(v_n)$ soit $v_{n+2} \leq v_{n+1}$

La proposition est donc vraie au rang $n + 1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$v_{n+1} \leq v_n$.

3°) e) En déduire que la suite (v_n) converge.

D'après c) la suite (v_n) est minorée par Φ, de plus d'après d) elle est décroissante. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (v_n) est convergente.

3°) f) Déterminer la limite de la suite (v_n).

On sait que :

pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \in [\Phi; 2]$

(v_n) converge vers l, donc $l \in [\Phi; 2]$

pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$

f est dérivable sur $[\Phi; 2]$ donc f est continue sur $[\Phi; 2]$.

Donc d'après le cours l vérifie $l = f(l) \Leftrightarrow l = \frac{l^2+1}{2l-1} \Leftrightarrow l^2 + 1 = l(2l - 1)$

D'où $l^2 - l - 1 = 0 \Leftrightarrow l = \Phi$ ou $l = \Phi'$. Or $l \in [\Phi; 2]$ donc $l = \Phi$.

Conclusion : La suite (v_n) converge vers Φ

4°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|v_n - \Phi|^2$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_{n+1} - \Phi| = \left|\frac{{v_n}^2 + 1}{2v_n - 1} - \Phi\right| = \left|\frac{{v_n}^2 + 1 - \Phi(2v_n - 1)}{2v_n - 1}\right| = \left|\frac{{v_n}^2 - 2v_n\Phi + \Phi + 1}{2v_n - 1}\right|$$

$$= \left|\frac{{v_n}^2 - 2v_n\Phi + \Phi^2}{2v_n - 1}\right| \quad \text{(rappelons que } \Phi^2 = \Phi + 1)$$

$$= \left|\frac{(v_n - \Phi)^2}{2v_n - 1}\right|$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $v_n \geq \Phi$ donc $\left|\frac{1}{2v_n - 1}\right| \leq \frac{1}{2\Phi - 1}$ *et* $\frac{1}{2\Phi - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

On a donc prouvé que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, |v_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|v_n - \Phi|^2$

5°) En déduire que par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|v_n - \Phi| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n-1}-1} (2-\Phi)^{2^{n-1}}$$

Montrons que la proposition est vraie au rang 1 :

On a $v_1 = 2$ donc $|v_1 - \Phi| = |2 - \Phi|$.

De plus $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{1-1}-1} (2-\Phi)^{2^{1-1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{1-1} (2-\Phi)^1 = (2-\Phi)$. On a donc bien

$$|v_1 - \Phi| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{1-1}-1} (2-\Phi)^{2^{1-1}}$$

Donc la proposition est vraie au rang 1.

Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

D'après 4°) on sait que$|v_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}|v_n - \Phi|^2$ or d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$|v_n - \Phi| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n-1}-1} (2-\Phi)^{2^{n-1}}$ ainsi l'inégalité devient :

$$|v_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n-1}-1} (2-\Phi)^{2^{n-1}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow |v_{n+1} - \Phi| \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n}-2} (2-\Phi)^{2^{n}}$$

$$\Leftrightarrow |v_{n+1} - \Phi| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n}-1} (2-\Phi)^{2^{n}}$$

La proposition est donc vraie au rang $n+1$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n-1}-1} (2-\Phi)^{2^{n-1}}$.

6°) A partir de quel entier p, v_p est une valeur approchée de Φ à 10^{-8} près ? Même question à 10^{-50} près ?

Par le calcul on a :

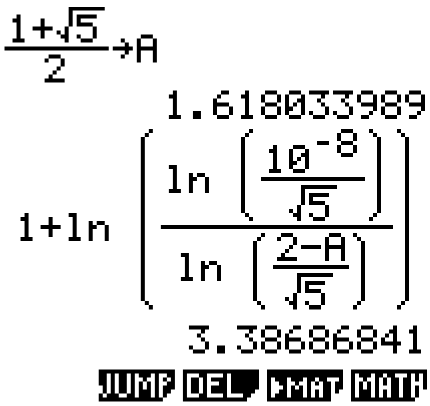
$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2^{n-1}-1}(2-\Phi)^{2^{n-1}} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2-\Phi)\right)^{2^{n-1}} \leq 10^{-8}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

les deux membres sont positifs donc

$$2^{n-1}\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2-\Phi)\right) \leq \ln\left(10^{-8}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

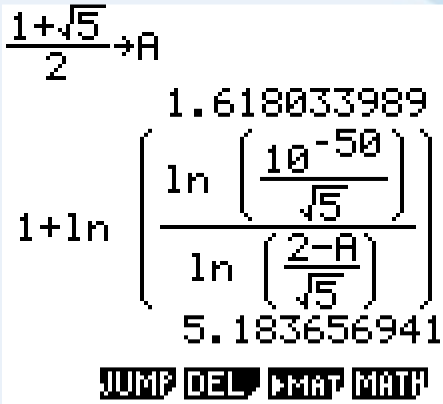
$$\Leftrightarrow\ n \geq 1+\ln\left(\frac{\ln\left(10^{-8}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)}{\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)(2-\Phi)\right)}\right)$$

On trouve



Soit $p = 4$.

Et pour 10^{-50} on trouve



Soit $p = 6$. Cette suite converge très vite.

7°) On définie la suite $b_n = \frac{v_{n+1}-\Phi}{(v_n-\Phi)^2}, n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite k.

D'après 4°) On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_{n+1} - \Phi = \frac{(v_n - \Phi)^2}{2v_n - 1} \quad ainsi \quad b_n = \frac{1}{2v_n - 1}$$

$$\text{Or } \lim_{n\to+\infty} v_n = \Phi \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2v_n - 1} = \frac{1}{2\Phi - 1} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Conclusion :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}$$