Étude d’une équation différentielle

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

Mettre en œuvre, sur tableur, la méthode d’Euler pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre avec un second membre exponentiel.

eActivité CORRESPONDANTE

METEULE1.g1e

Exercice n°1 : (METEULE1.g1e)

La température (en degré Celsius) d’un corps lors d’une réaction chimique peut être modélisée par l’équation différentielle suivante :

$$(E) : y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$$

La température initiale étant de 10°C on a : $y(0) = 10$

$y(t)$ correspond à la température (en degré Celsius) au bout de t heures. On admet que ce problème admet une solution unique.

On note h le pas d’itération, (t_n) la suite des instants en minutes, et (y_n) la suite des approximations de la température de la réaction, à l’instant t_n, par la méthode d’Euler.

1°) Dans le tableur de la Graph85, afficher le pas de la méthode, en cellule D1.

2°) Afficher en colonne A, les 50 premiers termes de la suite arithmétique de raison h et de premier terme 0.

3°) Afficher en colonne B, les valeurs de y_n correspondant aux valeurs de t_n, obtenues par la méthode d'Euler.

4°) Représenter le nuage de points grâce à la fonction graphique, puis conjecturer alors le comportement de cette solution.

5°) Tracer ensuite la courbe représentative de la fonction f, définie par :

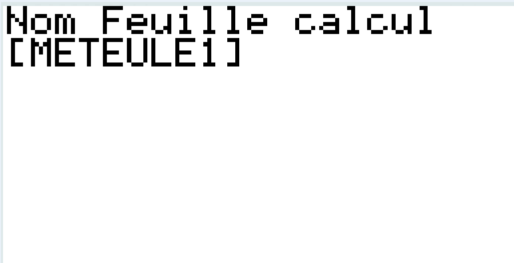
$$f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$$

Que peut-on conclure ? Le démontrer.

6°) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du maximum de la température de la réaction, ainsi que l'instant où celui-ci se produit.

1°) Dans le tableur de la Graph85, afficher le pas de la méthode, en cellule D1.

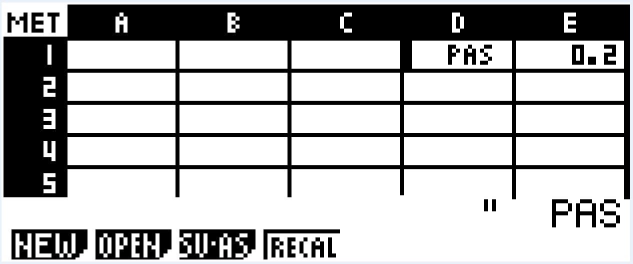
Tout d'abord, sélectionner le menu du tableur S·SHT (menu 4). Puis sauvegarder le fichier en appuyant sur FILE (touche F1) SV·AS (touche F3) puis entrer le nom de la feuille de calcul et appuyer sur EXE. Ici on a choisit METEULE1 comme nom de feuille.



On entre alors le pas d'itération de la méthode.

Tout texte dans une cellule, doit commencer par des guillemets : "
Par contre il n'est pas nécessaire de les fermer.

Voici ce que l'on obtient :



2°) Afficher en colonne A, les 50 premiers termes de la suite arithmétique de raison h et de premier terme 0.

Dire que la suite (t_n) est arithmétique de raison “le pas” et de premier terme 0, se traduit mathématiquement par :

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_{n+1} = t_n + \ le\ \ pas \end{cases}$$

Il est donc important que la cellule associée au pas d’itération soit fixe dans tout la calcul.

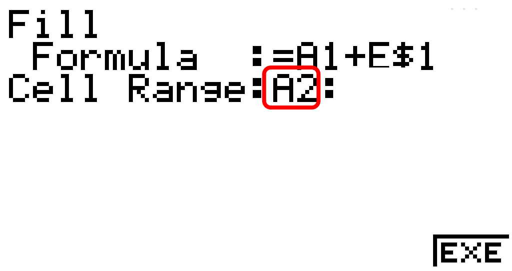
On commence par inscrire 0, dans la cellule A1.

Dans la cellule A2 on va entrer la formule : =A1+E$1

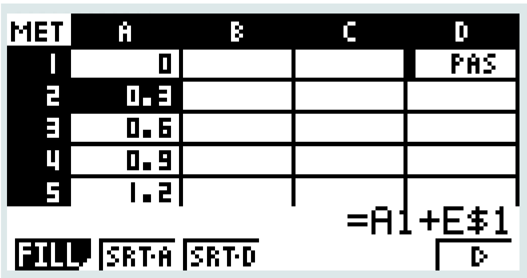
Dans les cellules A3 à A50, on va copier coller la formule précédente. On peut le faire « à la main » (c’est un peu long…) ou bien utiliser la fonction FILL (remplir) :

Appuyer sur EDIT (F2) puis ▷ (F6) et FILL (F1). Compléter l’écran comme suit :

Cela permet d’écrire en **A2** la formule =A1+E$1 et on la copie-colle jusqu’en **A50**.



La feuille de calcul devient alors :



3°) Afficher en colonne B, les valeurs de y_n correspondant aux valeurs de t_n, obtenues par la méthode d'Euler.

On construit alors la liste (y_n) des approximations des températures, obtenues par la méthode d'Euler.

On utilise l'approximation affine :

$$f(t_{n+1}) = f(t_n) + h.f'(t_n) + h.\varepsilon(h), avec \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Où f est la solution du problème.

Lorsque h est petit, alors $h\varepsilon(h)$ est très petit, on considère donc que $f(t_n) + h.f'(t_n)$ est une approximation de $f(t_{n+1})$.

Etant donné que $f(t_n) = -\frac{1}{2}f(x_n) + 20e^{-\frac{1}{2}t_n}$, d'après l'équation différentielle, on peut alors définir la suite récurrente suivante :

$$y_0 = \mathrm{f}(0) = 10 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} = y_n + h.\left(-\frac{1}{2}y_n + 20e^{-\frac{1}{2}t_n}\right).$$

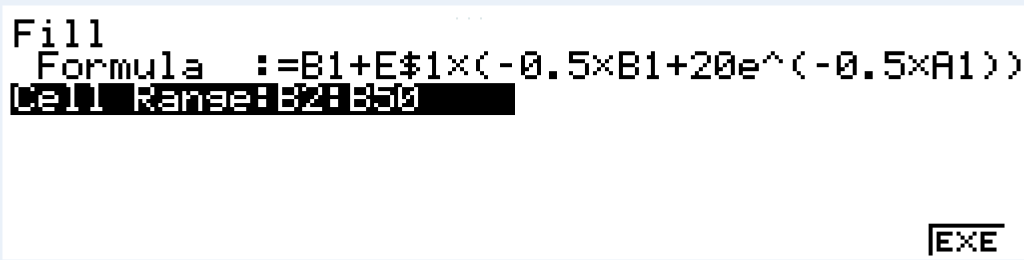
On en déduit alors la formule à entrer sur le tableur de la calculatrice.

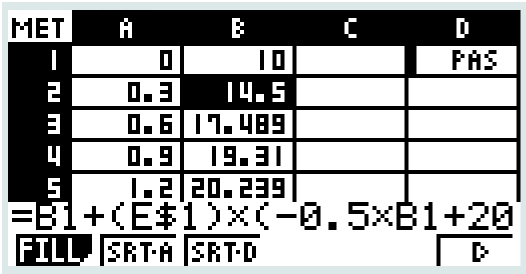
Dans la cellule B1 on entre 10

Dans la cellule B2, on entre la formule suivante :

=B1+(E$1)*(-0,5*B1+20*e^(-0,5*A1))

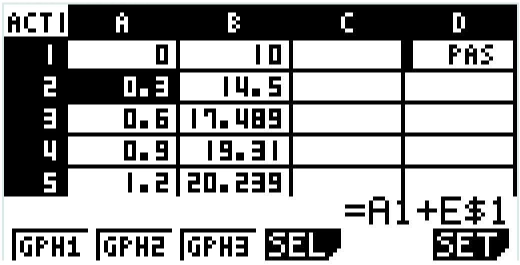
En utilisant la fonction FILL comme précédemment, on obtient les écrans suivants :





4°) Représenter le nuage de points grâce à la fonction graphique, puis conjecturer alors le comportement de cette solution.

Pour avoir accès à la fonction graphique, appuyer sur d, puis ▷ (F6) et GRPH (F1). On obtient l'écran suivant :

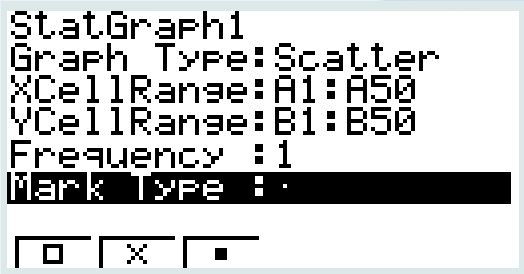


Pour paramétrer le type de graphique qu'on souhaite, appuyer sur SET (F6).

On doit alors sélectionner successivement :

i) Le numéro du graphique que l'on choisi.
   Par défaut, on choisi le graphique n°1
ii) Le type de graphique.
   On choisi le mode "point par point", Scatter
iii) La plage de cellules concernées pour les valeurs abscisses.
   A1 :A50
iv) La plage de cellules concernées pour les valeurs ordonnées.
   B1 :B50
v) Si ces valeurs sont pondérés ou non par des coefficients distincts de 1 ?
   Non, on laisse donc 1.
vi) Le type de marques inscrites dans la zone graphique.

On obtient l'écran suivant :

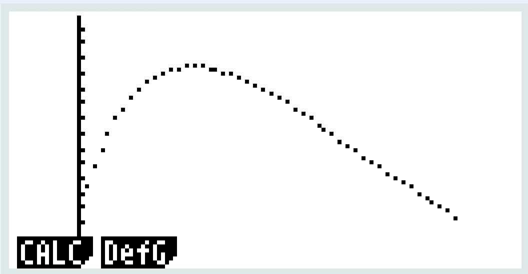


Reste ensuite à exécuter la graphique, en appuyant sur la touche F1, et voici ce qui apparaît à l’écran :

Avec un pas de 0,3

Avec un pas de 0,2

Avec un pas de 0,1



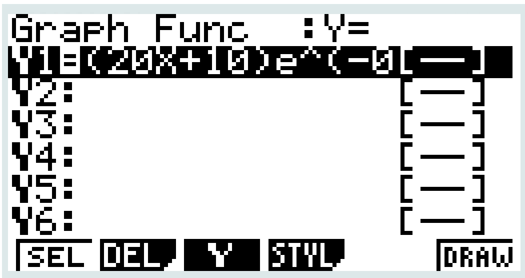
Ce qui laisse entrevoir les variations, ainsi que le maximum de la fonction….

5°) Tracer ensuite la courbe représentative de la fonction $\boldsymbol{f}$, définie par :

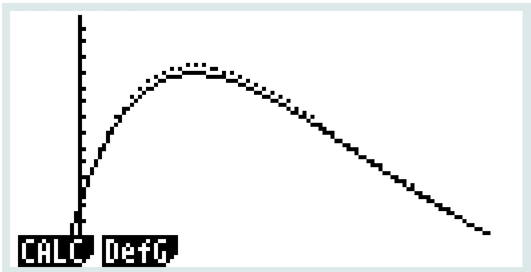
$$\boldsymbol{f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}}$$

Que peut-on conclure ? Le démontrer.

On peut alors directement tracer la courbe associée à la fonction f définie dans l'énoncé, en appuyant sur DefG (F2), donnant accès au menu des représentations graphiques de fonctions. Ainsi, on entre l'expression de la fonction dont on souhaite tracer la courbe, puis on la trace. On obtient les écrans suivants :



Puis,



Il est alors légitime de conjecturer que la fonction solution de ce problème semble effectivement être la fonction f. Ce que nous allons montrer :

Deux points sont à vérifier :

- On évalue f en 0 : $f(0) = (20 \times 0 + 10)e^{-\frac{1}{2}\times 0} = 10 \times 1 = 10$. D'où : $f(0) = 10$.
- Puis, il reste à vérifier que la fonction f vérifie l'équation différentielle

$$y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}.$$

f est le produit de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit alors $t \in \mathbb{R}$, il vient :

$$f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = \left(20 \times e^{-\frac{1}{2}t} + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}t} \times (20t + 10)\right) + \frac{1}{2}\left((20t + 10)e^{-\frac{1}{2}t}\right)$$

Soit encore :

$$f'(t)+\frac{1}{2}f(t)=20\times e^{-\frac{1}{2}t}+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{1}{2}t}\times(20t+10)-e^{-\frac{1}{2}t}\times(20t+10)\right)$$

Finalement :

$$f'(t)+\frac{1}{2}f(t)=20e^{-\frac{1}{2}t}$$

On a donc montré que f vérifie $y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$ et $f(0)=10$.

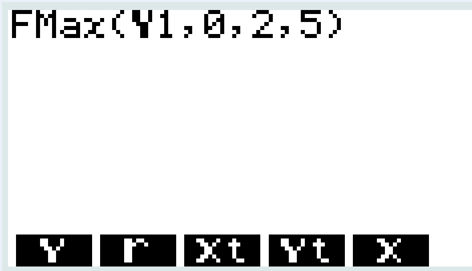
6°) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du maximum de la température de la réaction, ainsi que l'instant où celui-ci se produit.

Une fois que l'on a tracé la représentation graphique de la fonction f, on peut grâce à la fonction FMax, déterminer le maximum que l'on a conjecturé :

On retourne dans le Menu RUN

Puis, dans i, CALC, ▷, se trouve la commande FMax

En respectant la sémantique, voici ce que l'on peut taper et obtenir :



Y1 correspond à la fonction définie précédemment.

Puis, en l'exécutant, on a :

Ce qui représente les coordonnées du point cherché.

Par le calcul, on vérifie aisément que :

$$f'(t)=(15-10t)e^{-\frac{1}{2}t}$$

Cette fonction dérivée s’annule en 1,5 en changeant de signes… donc le maximum est bien atteint au bout d’1h30 de réaction chimique. Et la température maximale est alors de :