Étude d’une équation différentielle à coefficients non constants.

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

Mettre en œuvre, sur tableur, la méthode d’Euler pour une équation linéaire du premier ordre, à coefficients non constants et avec un second membre. Puis se servir de l’outil de régression de la calculatrice pour conjecturer et déterminer la solution problème différentiel.

eActivité CORRESPONDANTE

METEULE2.g1e

Exercice n°1 (MetEul2.g1e):

On considère (E) l’équation différentielle suivante :

$$(\cos x)y' + (\sin x)y = 1 \text{ et } y(0) = 0$$

On admet que, l’équation posée admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, f de courbe associée C_f, satisfaisant le problème posé.

Il s’agit d’appliquer la méthode d’Euler, à l’aide du tableur de la calculatrice, à cette équation différentielle pour conjecturer le type de fonctions solutions, puis de conjecturer la solution du problème grâce aux fonctionnalités de régression de la calculatrice.

1°) Afficher le pas de la méthode, en cellule E1. On fixe $h = 0{,}05$.

2°) Afficher dans les **61** premières cellules de la colonne A, les valeurs de (x_n) la suite arithmétique de raison h, telle que $x_{31} = 0$.

3°) Afficher en colonne B, les valeurs de y_n correspondant aux valeurs de x_n, obtenues par la méthode d'Euler.

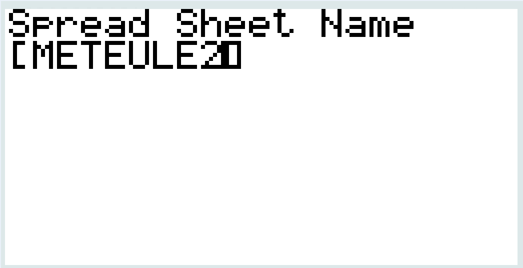
4°) Représenter le nuage de points grâce à la fonction graphique, puis conjecturer alors à quel grand type de fonction, cette solution semble-telle s'apparenter ?

5°) Grâce au menu de régression de la calculatrice, conjecturer la solution de ce problème différentiel. Tracer alors à l'écran cette fonction.
Que peut-on conclure ? (une démonstration est demandée).

6°) À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée du maximum de la température de la réaction, ainsi que l'instant où celui-ci se produit.

1°) Afficher le pas de la méthode, en cellule E1. On fixe $h = 0,05$.

Tout d'abord, sélectionner le menu du tableur S-SHT (menu 4). Puis sauvegarder le fichier en appuyant sur FILE (touche F1) SV-AS (touche F3) puis entrer le nom de la feuille de calcul et appuyer sur EXE. Ici on a choisit METEULE1 comme nom de feuille.

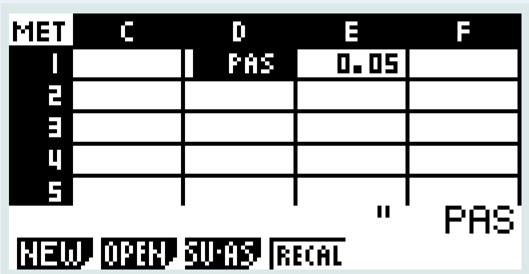


On entre alors le pas d'itération de la méthode.

Tout texte dans une cellule, doit commencer par des guillemets : "

Par contre il n'est pas nécessaire de les fermer.

Voici ce que l'on obtient :



CASIO
www.casio-education.fr

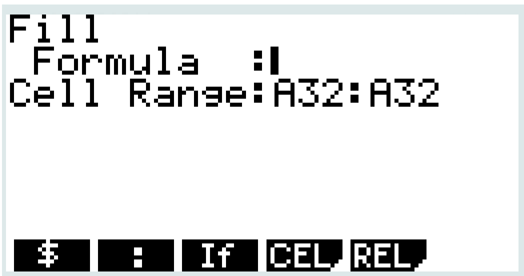
2°) Afficher dans les 61 premières cellules de la colonne A, les valeurs de (x_n) la suite arithmétique de raison h, telle que $x_{31} = 0$.

Dire que la suite (x_n) est arithmétique de raison “le pas” et telle que $x_{31} = 0$, se traduit par l’écriture :

$$\begin{cases} x_{31} = 0 \\ x_{n+1} = x_n + Le\ pas \end{cases}$$

Pour cela, on entre la valeur 0, dans la cellule A31, puis, pour les cellules de A30 à A1, on fonctionne par COPY-PASTE.
Il est donc important que la cellule associée au pas d’itération soit fixe dans tout le calcul.

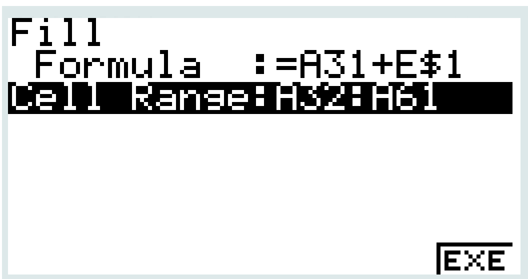
On commence par inscrire 0, dans la cellule A31
Ensuite, appuyer sur EDIT (F2) puis ▷ (F6) et FILL (F1). La fonction FILL permet d’inscrire une formule. Voici l’écran à obtenir :



Et la formule à inscrire est donc :

=A31+E$1

On exécute cette formule en la spécifiant de A32 à A61, et on obtient alors l’écran suivant :



3°) Afficher en colonne B, les valeurs de y_n correspondant aux valeurs de x_n, obtenues par la méthode d'Euler.

On construit alors la liste (y_n) des approximations des valeurs de (x_n), obtenues par la méthode d'Euler.

Tout est basé sur la relation :

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + h.f'(x_n) + h.\varepsilon(h), avec \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Où f est la solution du problème.

Lorsque h est petit, alors $h\varepsilon(h)$ est très petit, on considère donc que

$f(x_n) + h.f'(x_n)$ est une approximation de $f(x_{n+1})$.

On sait que $(\cos x)f'(x) + (\sin x)f(x) = 1$, d'après l'équation différentielle.

donc $f'(x) = \frac{1-(\sin x)f(x)}{\cos x}$

Ainsi $f'(x_n) = \frac{1-(\sin x_n)f(x_n)}{\cos x_n}$ soit $f'(x_n) = \frac{1-(\sin x_n)y_n}{\cos x_n}$

La difficulté à noter concerne l'ensemble de définition de cette quantité dont le dénominateur s'annule tous les $\frac{\pi}{2}(\pi)$. C'est pourquoi, dans cet exercice on s'est arrangés pour que la suite des valeurs de (x_n) ne soit pas en dehors de l'intervalle $[-1,5; 1,5]$. Ce qui va pouvoir permettre à la méthode de régression d'être efficace par la suite. On obtient donc

$$y_{31} = \mathrm{f}(0) = 0 \text{ et pour tout } n \in [\![32; 61]\!]\ y_{n+1} = y_n + h\frac{1-(\sin x_n)y_n}{\cos x_n}$$

$$\text{Et pour tout } n \in [\![30; 1]\!],\ y_{n+1} = y_n - h\frac{1-(\sin x_n)y_n}{\cos x_n}$$

On en déduit alors la formule à entrer sur le tableur de la calculatrice.

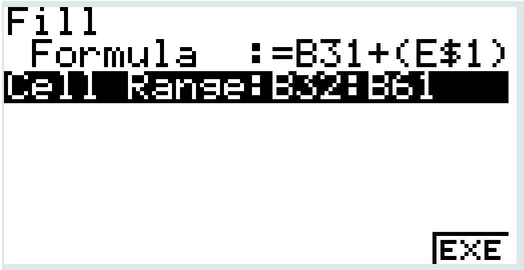
Dans la cellule B31 : 10

Dans la cellule B32, on entre la formule suivante :

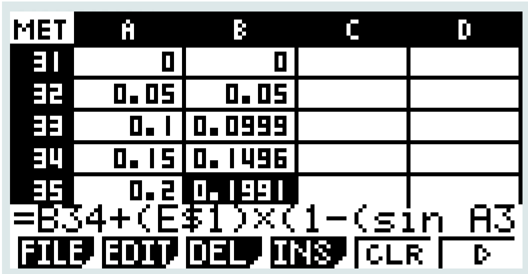
=B31+(E$1)*(1-(sin A31)*(B31))/(cos A31)

Voici l'écran que l'on peut alors obtenir :

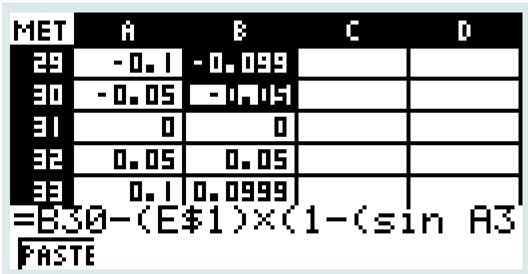
CASIO
www.casio-education.fr



Puis,



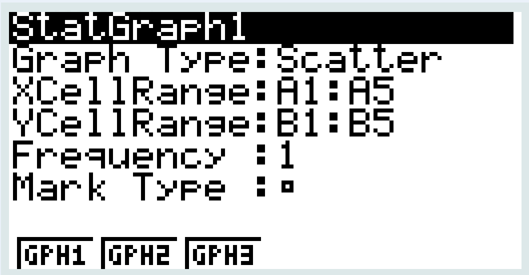
Il faut à présent calculer les approximations des abscisses négatives. Pour se faire, on utilise le COPY-PASTE. C'est-à-dire que l'on complète la cellule A30, que l'on copie et que l'on colle successivement jusqu'à la cellule A1 :



Il ne reste plus qu'à placer ces points dans un repère…

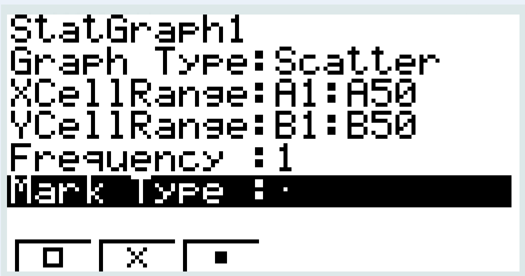
4°) Représenter le nuage de points grâce à la fonction graphique, puis conjecturer alors à quel grand type de fonction, cette solution semble-telle s'apparenter ?

Utile à savoir… Lorsque l'on souhaite revenir à l'écran initial du menu dans lequel on travaille, appuyer sur la touche EXIT, jusqu'à ce que l'écran ne change plus.
Et donc, pour commencer, revenir à l'écran initial du tableau METEULE2
Grâce à la touche F6, le menu GRAPH apparaît en touche F1. La sélectionner, pour entrer le SETUP du menu graphique, grâce à la touche F6. Voici ce que l'on doit obtenir :



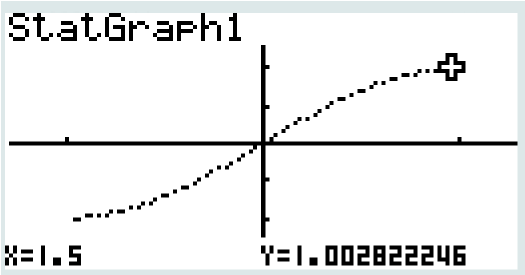
On doit alors sélectionner successivement :

i) Le numéro du graphique que l'on choisi.
Par défaut, on choisi le graphique n°1
ii) Le type de graphique.
On choisi le mode "point par point", Scatter
iii) La plage de cellules concernées pour les valeurs abscisses.
A1 :A61
iv) La plage de cellules concernées pour les valeurs ordonnées.
B1 :B61
v) Si ces valeurs sont pondérés ou non par des coefficients distincts de 1 ?
Non, on laisse donc 1.
vi) Le type de marques inscrites dans la zone graphique.
Le "." est plus précis que les autres. Mais c'est une fois de plus, du goût de chacun !



Reste ensuite à exécuter la graphique, en appuyant sur la touche F1, et voici ce qui apparaît à l'écran :

Avec un pas de 0,05



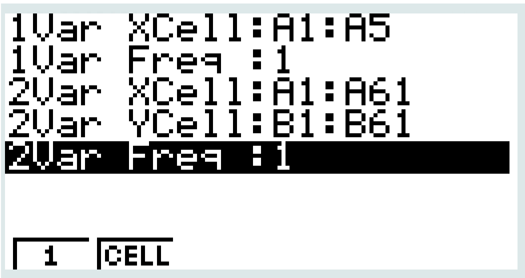
À ce stade, il est tout à fait légitime de penser que cette courbe semble s'apparenter à la famille des courbes sinusoïdales.

Il est donc temps de s'aider de l'outil de régression pour finaliser la conjecture et passer à la démonstration.

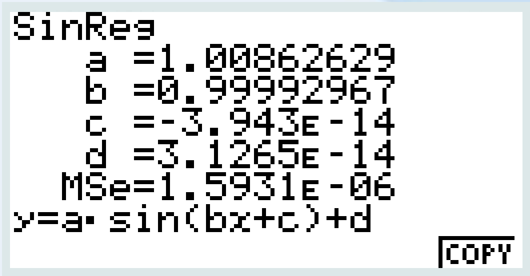
5°) Grâce au menu de régression de la calculatrice, conjecturer la solution de ce problème différentiel. Tracer alors à l'écran cette fonction. Que peut-on conclure ? (une démonstration est demandée).

Toujours dans le menu S-SHT, dans le menu CALC (F2), on fait apparaître les fonctions de statistiques à 1 et 2 variables, et en particulier le menu de régression. En particulier la touche de **régression sinusoïdale.**

Avant tout on précise les cellules concernées par ces calculs…



La touche F3, permet d'accéder ensuite au menu de régression et de choisir la régression sinusoïdale. Voici ce donne le calcul :

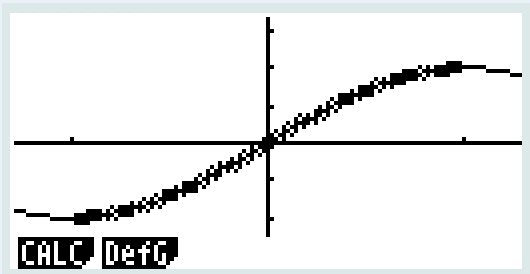


Conclusion :

Il semble que la fonction solution cherchée soit précisément la fonction **sinus**.

On vérifie en la copiant dans le menu de graphique, pour la tracer et constater que :

Et donc



On peut en plus tracer la fonction sinus, ce n’est pas interdit :On constate bien la “superposition des courbes”.

Reste à le démontrer… Et vu que $sin' = cos$, et que :

$$\text{pour tout réel x, } \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

La démonstration est terminée.

CASIO
www.casio-education.fr