



Etude d'une fonction exponentielle

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

On va étudier une fonction exponentielle dont la représentation graphique nous induit en erreur si on choisit une mauvaise fenêtre graphique...

On utilisera les différentes fonctions de la graph85 pour vérifier nos calculs et nous aider dans la recherche des différentes questions.

Nous allons à travers un sujet de Bac S (Inde 2003), étudier la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

eActivité CORRESPONDANTE

EXPO.g1e

Exercice n°1 (EXPO.g1e):



A. Introduction


1°) Représenter graphiquement la fonction f . On utilisera comme fenêtre graphique $-5 \leq x \leq 5$ et $-5 \leq y \leq 5$.

2°) Emettre une conjecture sur le sens de variation de cette fonction, ainsi que sur la position de la courbe par rapport à l'axe ($x'x$) ?

B. Contrôle des conjectures.

1°) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

b) Représenter à l'aide de la calculatrice sur le même graphique les courbes représentant la fonction f' que vous venez de calculer (tracer en trait normal,  ) puis $f' = \frac{df}{dx}$

calculé par la calculatrice (tracer en trait épais ) afin de vérifier votre calcul de la question précédente.

- c) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ où g est la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1$.

2°) Etude du signe de $g(x)$ pour x réel.

- a) A l'aide d'un tableau de valeurs, conjecturer la valeur de

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

- b) Valider vos conjectures précédentes par un calcul.
c) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .
d) Vérifier vos calculs en utilisant les représentations graphiques.
e) En déduire le sens de variation de la fonction g , puis dresser son tableau de variation.
f) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans \mathbb{R} .
On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
g) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

3°) Sens de variation de la fonction f sur \mathbb{R} .

- a) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction f .
c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?
d) Donner le tableau de variations de f . Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?
e) Représenter graphiquement la fonction f en utilisant les intervalles suivant : $x \in [-0,2; 0,4]$ et $y \in [-0,01; 0,01]$
-



SOLUTION

A. INTRODUCTION

On considère la fonction numérique f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$$

1°) Représenter graphiquement la fonction f . On utilisera comme fenêtre graphique $-5 \leq x \leq 5$ et $-5 \leq y \leq 5$.

Dans le menu  entrer la fonction :

```
Fonct graph : Y=
Y1: X^2 e^(X-1) - X^2 ÷ [ ]
Y2: [ ]
Y3: [ ]
Y4: [ ]
Y5: [ ]
Y6: [ ]
[SEL] [DEL] [TYPE] [STYL] [MEM] [DRAW]
```

On choisit ma fenêtre graphique imposée par l'énoncé :

```
Fen-V
Xmin : -5
max : 5
scale: 1
dot : 0.07936507
Ymin : -5
max : 5
[INIT] [TRIG] [STD] [STO] [RCL]
```

On obtient le graphique suivant :



2°) Emettre une conjecture sur le sens de variation de cette fonction, ainsi que sur la position de la courbe par rapport à l'axe $(x' x)$?

On peut conjecturer que f est croissante sur \mathbb{R} , puis que C_f est en dessous de l'axe $(x' x)$ sur \mathbb{R}_- et au dessus de l'axe $(x' x)$ sur \mathbb{R}_+

B. Contrôle des conjectures.

1°) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x .

La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme.



La fonction $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme, donc la fonction $x \mapsto e^{x-1}$ est dérivable sur \mathbb{R} .






Ainsi la fonction $x \mapsto x^2 e^{x-1}$ est dérivable sur \mathbb{R} comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

Conclusion : f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x$$

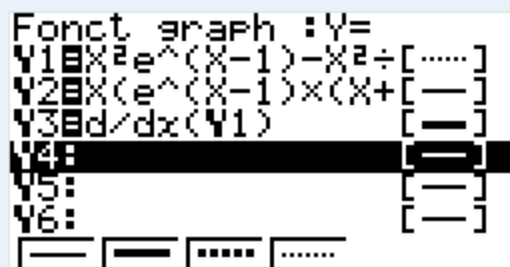


1°) b) Représenter à l'aide de la calculatrice sur le même graphique les courbes représentant la fonction f' que vous venez de calculer (tracer en trait normal, ) puis $f' = \frac{df}{dx}$ calculé par la calculatrice (tracer en trait épais ) afin de vérifier votre calcul de la question précédente.

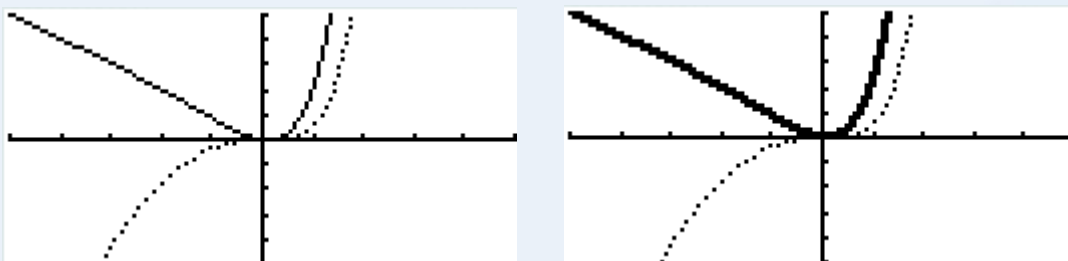
La première fonction entrée est f , pour la deuxième entrons f' que nous venons de calculer et pour la troisième il faut appuyer sur      pour indiquer à la calculatrice d'entrer Y3 correspond à la dérivée de la fonction Y1 (soit la dérivée de f).

On a choisit de représenté la courbe de f en pointillés (style ) . On applique les styles demandés pour les deux autres fonctions.

On obtient ainsi l'écran suivant :



Lors de la représentation graphique des fonctions, on obtient pour les écrans suivants pour les deux premières courbes puis les 3 courbes ensemble :



Cela confirme que notre calcul de dérivée est juste.

1°) c) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ où g est la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = 2xe^{x-1} + x^2e^{x-1} - x$. Donc :

$$f'(x) = x(2e^{x-1} + xe^{x-1} - 1) = x(e^{x-1}(x + 2) - 1) = xg(x)$$

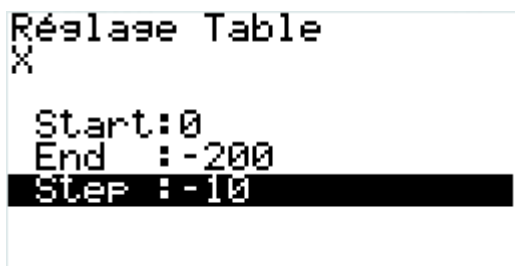
2°) a) A l'aide d'un tableau de valeurs, conjecturer la valeur de


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

Dans le menu  entrer l'expression de $g(x)$.

Pour étudier $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ on va choisir les valeurs suivantes pour le tableau :

Appuyer sur  et entrer les valeurs suivantes :



Valider puis appuyer sur . On obtient le tableau suivant :

X	Y4
0	-0.264
-10	-1
-20	-1
-30	-1
-40	-1
-50	-1
-60	-1
-70	-1
-80	-1
-90	-1
-100	-1
-110	-1

Il semble raisonnable de conjecturer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$.

La convergence semble très rapide.

1^{re}/Terminale S

Graph 85/85 SD



Pour étudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ on va choisir les valeurs suivantes pour le tableau :

Appuyer sur **SET** et entrer les valeurs suivantes :

```
Réglage Table
X
Start:0
End :200
Step :10
```

Valider puis appuyer sur **TABL**. On obtient le tableau suivant :

X	Y4
0	-0.264
-10	97236
-20	3.92E9
-30	1.2E14
-40	3.6E18
-50	9.9E22
-60	2.6E27
-70	6.6E31
-80	1.6E36
-90	4.1E40
-100	1E45
-110	2.4E49

A première vue il ne semble pas y avoir de conjecture possible. Mais il faut mieux observer les valeurs...

En surlignant les valeurs de Y4 on obtient une valeur plus précise :

```
Y4=(X+2)e^(X-1)-1
  X      Y4
  [ 0 -0.264 ]
  [ 10 97236 ]
  [ 20 3.92E9 ]
  [ 30 1.2E14 ]
  1.258026975E+14
FORM DEL ROW EDIT F·CON G·PLT
```

```
Y4=(X+2)e^(X-1)-1
  X      Y4
  [ 70 6.6E31 ]
  [ 80 1.6E36 ]
  [ 90 4.1E40 ]
  [ 100 1E45 ]
  1.008681093E+45
FORM DEL ROW EDIT F·CON G·PLT
```

Il semble maintenant raisonnable de conjecturer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

2°) b) Valider vos conjectures précédentes par un calcul.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1 = xe^x \times e^{-1} + 2e^{x-1} - 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0 \text{ (cours) on en déduit que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x \times e^{-1} = 0$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = +\infty \text{ on en déduit que } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2)e^{x-1} = +\infty$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

2°) c) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x .

$$g(x) = (x + 2)e^{x-1} - 1$$

La fonction $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme, donc la fonction $x \mapsto e^{x-1}$ est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto x + 2$ est dérivable sur \mathbb{R} car c'est une fonction polynôme.

Ainsi g est dérivable sur \mathbb{R} comme produit et somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = e^{x-1} + (x + 2)e^{x-1} = (x + 3)e^{x-1}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $e^{x-1} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x + 3$.

Conclusion : Pour tout $x \in]-\infty; -3[$ $g'(x) < 0$

et pour tout $x \in]-3; +\infty[$ $g'(x) > 0$



2°) d) Vérifier vos calculs en utilisant les représentations graphique.

On trace tout d'abord la fonction g' que nous avons calculé en pointillés puis la dérivée de g calculée par la calculatrice. On obtient les écrans suivants :

Pour la fenêtre graphique :

```
Fen-V
max :3
scale:1
dot :0,06349206
Ymin :-2
max :5
scale:1
INIT|TRIG|STD|STO|RCL
```

Pour les fonctions entrées :

```
Fonct graph :Y=
Y1|(X+2)e^(X-1)-[.....]
Y2|d/dx(Y1) [---]
Y3|(X+3)e^(X-1) [....]
Y4: [---]
Y5: [---]
Y6: [---]
[---] [---] [....] [.....]
```

On obtient les graphiques suivants :



Ce qui confirme bien nos calculs.



2°) f) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

x	$-\infty$	-3	α	$+\infty$
signe de g'	-	0	+	
g	-1	$-e^4 - 1$	0	$+\infty$

Diagramme de variation pour la fonction g :
 - À $x = -\infty$, $g = -1$.
 - À $x = -3$, $g = -e^4 - 1$.
 - À $x = \alpha$, $g = 0$.
 - À $x = +\infty$, $g \rightarrow +\infty$.
 La fonction est décroissante sur $]-\infty; \alpha[$ et croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

D'après le tableau de variation on peut affirmer que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$ $g(x) < 0$ et pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$ $g(x) > 0$.

3°) a) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.

On sait d'après A. 1°) que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = xg(x)$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
signe de x	-	0	+	+
signe de $g(x)$	-		-	0
signe de $f'(x)$	+	0	-	0

3°) b) En déduire le sens de variation de la fonction f .

f est croissante sur $]-\infty; 0[$ et f est croissante sur $]\alpha; +\infty[$.

f est décroissante sur $]0; \alpha[$.

3°) c) Que pensez-vous de votre première conjecture ?

On avait conjecturé que f était croissante sur \mathbb{R} , ce qui est faux car f est décroissante sur $]0; \alpha[$.

3°) d) Donner le tableau de variations de f . Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
signe de f'	$+$	0	$-$	$+$
f				

3°) e) Représenter graphiquement la fonction f en utilisant les intervalles suivant : $x \in [-0, 2; 0, 4]$ et $y \in [-0, 01; 0, 01]$

En paramétrant la fenêtre graphique de la façon suivante :

```

Fen-V
Xmin  :-0.2
max   :0.4
scale:0.1
dot   :4.7619E-03
Ymin  :-0.01
max   :0.01
|INIT|TRIG|STD|STO|RCL
    
```

On obtient :



Ce qui infirme une fois de plus la seconde conjecture.