



## Propriété géométrique de la parabole

### NIVEAU

Terminale S.

### OBJECTIFS

On considère la parabole ( $P$ )  
d'équation  $y = x^2$ .

Soit  $a$  un réel.

Soit  $T_a$  la tangente à ( $P$ ) au point  
de ( $P$ ) d'abscisse  $a$  et  $D_a$  la  
normale à  $T_a$  passant par le point  
de ( $P$ ) d'abscisse  $a$ .

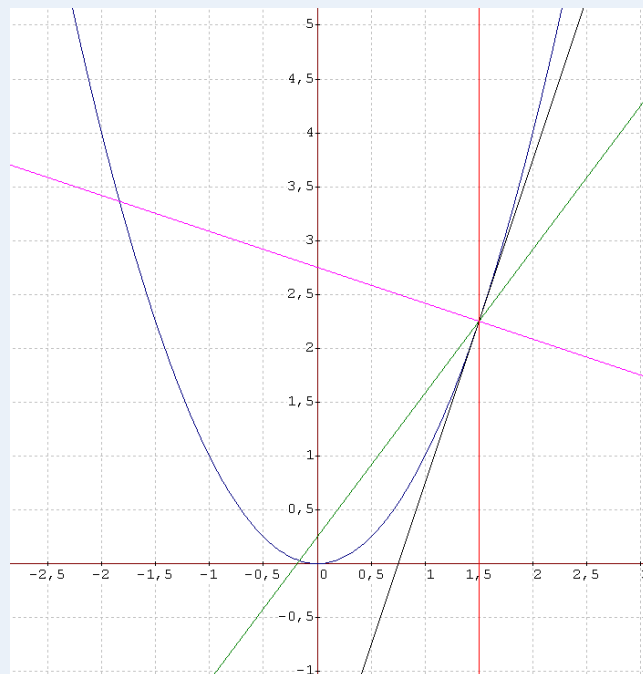
On considère la droite  $d_a: x = a$ .

Cette droite  $d_a$  représente une  
onde provenant d'un satellite.

La parabole ( $P$ ) va réfléchir cette  
onde. On va donc chercher la

droite  $d'_a$  image de  $d_a$  par la réflexion d'axe  $D_a$ .

Le but de ce exercice est de visualiser les différentes positions de  $d'_a$  puis d'émettre une conjecture sur une propriété géométrique de cette famille de droites.



### EActivité CORRESPONDANTE

PARABOLE.g1e

**Exercice n°1 (PARABOLE.g1e):**

On considère la parabole  $(P)$  d'équation  $y = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Soit  $M_a$  le point de  $(P)$  d'abscisse  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}^*$ .

1°) Déterminer les coordonnées de  $M$ . Soit  $T_a$  la tangente à  $(P)$  en  $M_a$ . Déterminer l'équation de  $T_a$ .

2°) Faites la représentation graphique dynamique de  $(P)$  ainsi que des droites  $T_a$  pour  $a \in [0,2; 1]$  avec un pas de 0,1.

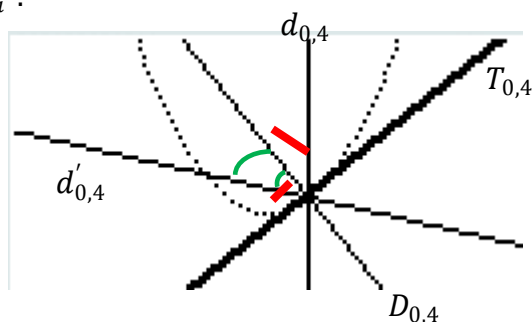
3°) On considère la droite  $D_a$  perpendiculaire à  $T_a$  en  $M_a$ . Déterminer une équation de  $D_a$ .

4°) Faites la représentation graphique dynamique de  $(P)$ , et  $d'_a: y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}$  pour  $a \in [0,2; 1]$  avec un pas de 0,1 (on prendra la fenêtre graphique suivante :  $-2,52 \leq x \leq 2,52$  et  $-0,74 \leq y \leq 1,74$ ). Que remarquez-vous pour les droites  $d'_a$  ?

5°) On rappelle que  $d_a: x = a$  et .

$$d'_a: y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}.$$

Montrer que la droite  $d'_a$  est l'image de  $d_a$  par la réflexion d'axe  $D_a$ .



6°) Démontrer votre remarque du 4°)



### SOLUTION

1°) Déterminer les coordonnées de  $M$ . Soit  $T_a$  la tangente à  $(P)$  en  $M_a$ . Déterminer l'équation de  $T_a$ .  
 $M \in (P)$  donc  $M(a, a^2)$ .

L'équation de  $T_a$  est  $y = 2a(x - a) + a^2$  soit  $y = 2ax - a^2$ .

2°) Faites la représentation graphique dynamique de  $(P)$  ainsi que des droites  $T_a$  pour  $a \in [0, 2; 1]$  avec un pas de 0,1.

Dans le menu **DYNA** (touche 6), entrer l'équation cartésienne de la parabole ainsi que de la droite  $T_a$  comme suit :

```
Dynamic Func:Y=  
Y1 X^2  
Y2 2AX-A^2  
Y3:  
Y4:  
Y5:  
Y6:  
SEL DEL TYPE VAR B-IN RCL
```

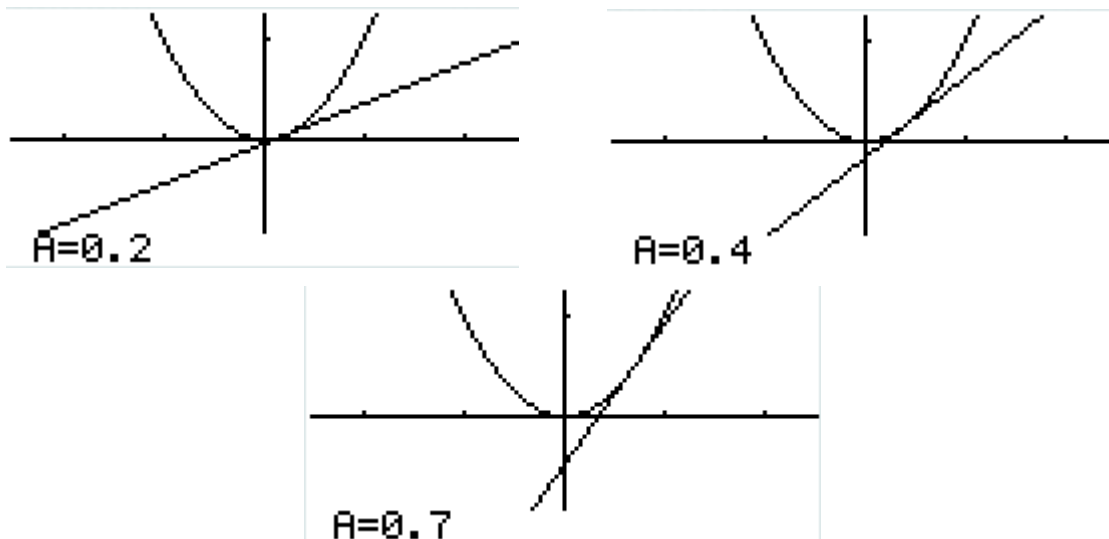
Pour indiquer à la Graph85 que A est le paramètre ainsi que les valeurs qu'il doit prendre on appuie sur **VAR** (F4) l'écran qui s'en suit nous indique que la Graph85 a reconnu A comme paramètre,

```
Trop de fonctions  
Var dynam :A / ▸  
A=1.5  
SEL SET SPEED DYNA
```

pour paramétrer ses valeurs il faut appuyer sur **SET** (F2) et on complète comme suit :

```
Trop de fonctions  
Réglage Dynamique  
A  
Start:0.2  
End :1  
Step :0.1
```

On valide en appuyant sur **EXE** puis sur **DYNA** (**F6**) on obtient l'animation suivante :



Remarque : Pour arrêter l'animation, appuyer sur **AC/ON**.

3°) On considère la droite  $D_a$  perpendiculaire à  $T_a$  en  $M_a$ . Déterminer une équation de  $D_a$ .

Le coefficient directeur de  $T_a$  est  $2a$  donc le coefficient directeur de  $D_a$  est  $-\frac{1}{2a}$ .

$D_a$  a une équation du type  $y = -\frac{1}{2a}x + p$ . Pour déterminer  $p$  on utilise l'hypothèse  $M_a \in D_a$  :

$$a^2 = -\frac{1}{2a}a + p \text{ donc } p = a^2 + \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ainsi } D_a : y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}.$$

4°) Faites la représentation graphique dynamique de  $(P)$ , et  $d'_a : y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}$  pour  $a \in [0, 2; 1]$  avec un pas de 0,1 (on prendra la fenêtre graphique suivante :  $-2,52 \leq x \leq 2,52$  et  $-0,74 \leq y \leq 1,74$ ). Que remarquez-vous pour les droites  $d'_a$  ?

On revient dans le menu **DYNA** (touche 6), et on va effacer la seconde équation  $Y2 = 2AX - A^2$ . Pour cela on la sélectionne puis on appuie sur **DEL** (**F2**) puis appuyer sur **F1** pour confirmer.

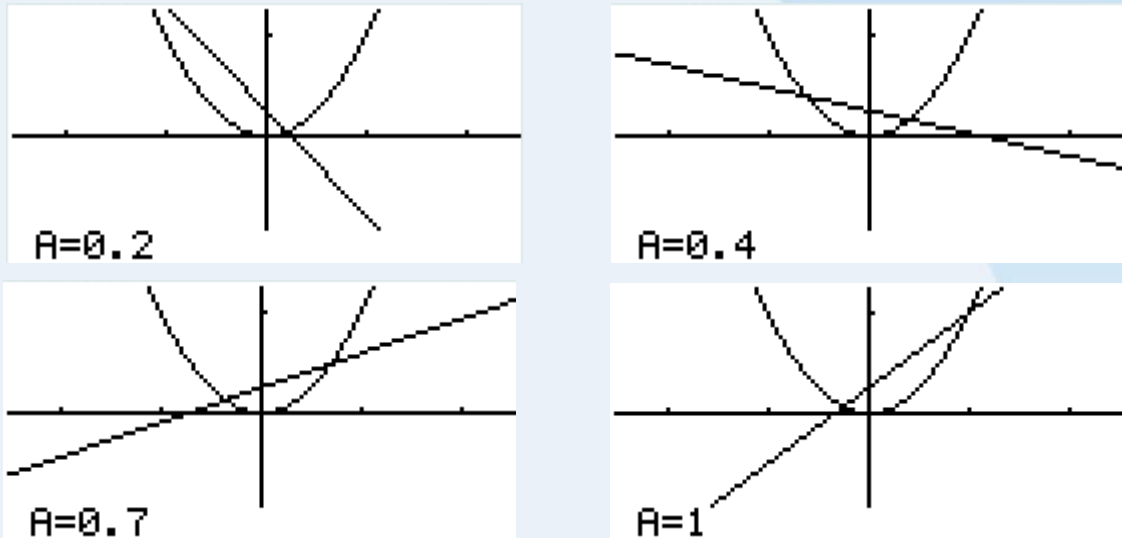
On entre maintenant l'équation cartésienne de la droite  $d'_a$  et on obtient l'écran suivant :

```

Fonct dynam :Y=
Y1=X^2
Y2=(A-1÷(4×A))×X+1÷4
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
SEL DEL TYPE VAR B-IN RCL
    
```



Cliquer alors sur **[EXE]** puis sur **[DYN]** (**[F6]**) on obtient l'animation suivante :

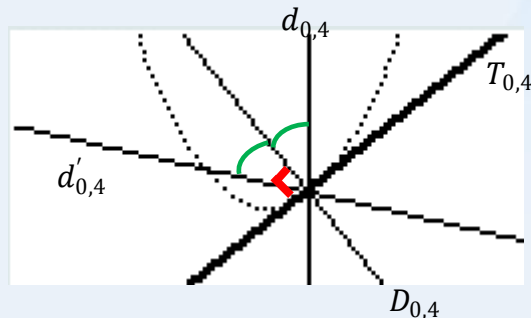


On remarque que toutes les droites  $d'_a$  passe par un même point situé sur l'axe des ordonnées.

5°) On rappelle que  $d_a: x = a$  et  $d'_a: y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}$ .

Montrer que la droite  $d'_a$  est l'image de  $d_a$  par la réflexion d'axe  $D_a$ .

Notons tout d'abord que  $d_a$  et  $d'_a$  sont concourantes au point de coordonnées  $(a, a^2)$ .



$\vec{j}$  est un vecteur directeur de  $d_a$ .

$\vec{u} \begin{pmatrix} 2a \\ -1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $D_a$ .

$$\cos(\vec{j}; \vec{u}) = \frac{\vec{j} \cdot \vec{u}}{\|\vec{j}\| \cdot \|\vec{u}\|} = -\frac{1}{1 \times \sqrt{4a^2 + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

$\vec{v} \begin{pmatrix} 4a \\ 4a^2 - 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $d'_a$ .

$$\begin{aligned} \cos(\vec{u}; \vec{v}) &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4a^2 + 1}{\sqrt{4a^2 + 1} \times \sqrt{16a^2 + (4a^2 - 1)^2}} \\ &= \frac{4a^2 + 1}{\sqrt{4a^2 + 1} \times \sqrt{(4a^2 + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4a^2 + 1}} \end{aligned}$$

Ainsi  $\cos(\vec{j}; \vec{u}) = -\cos(\vec{u}; \vec{v})$  ce qui prouve que  $(\widehat{d_a; D_a}) = (\widehat{D_a; d'_a})$  ( $\pi$ )

Donc  $d'_a$  est l'image de  $d_a$  par la réflexion d'axe  $D_a$

6°) Démontrer votre remarque du 4°)

$d'_a: y = \left(a - \frac{1}{4a}\right)x + \frac{1}{4}$ . Donc si  $x = 0$  alors  $y = \frac{1}{4}$ . Donc  $d'_a$  passe par le point

de coordonnées  $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ .

Le point F de coordonnées  $\left(0; \frac{1}{4}\right)$  correspond au **foyer** de la parabole.

