



La constante γ d'Euler

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

La constante d'Euler notée γ , peut se définir comme la limite d'une suite. Elle a été découverte en 1781 par Leonhard Euler qui avait obtenu les 16 premières décimales.

Nous allons étudier une suite qui converge vers γ .

eActivité CORRESPONDANTE

EULER.G1e

Exercice n°1 (EULER.g1e):

$$\text{Soit } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, n \in \mathbb{N}^*$$

1°) a) Dresser le tableau de valeurs de la suite (S_n) . On pourra afficher les 20 premiers termes

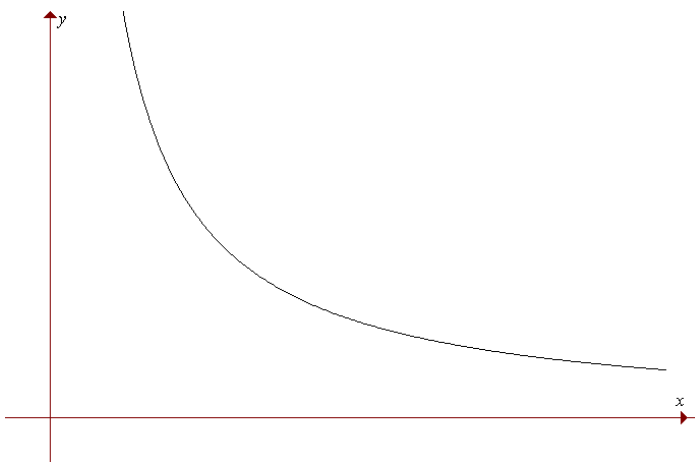
b) Afficher la représentation graphique du nuage de points formé par les 100 premiers termes de la suite (S_n) . Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de cette suite ? A quelle fonction cela vous fait-il penser ?

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

On pourra utiliser le fait que la fonction

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[n; n+1]$.



3°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln n$

4°) Que pouvez-vous en déduire sur la limite de la suite (S_n) ? Cela confirme-t-il votre conjecture du 1°) ?

5°) a) Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \text{ et } g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

Que pouvez-vous conjecturer sur la position relative de ces deux courbes ?

b) Soit $\varphi = f - g$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ , puis démontrer votre conjecture précédente.

6°) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = S_n - \ln(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Dresser le tableau de valeurs de suites (u_n) ainsi que sa représentation graphique. Que pouvez-vous conjecturer pour cette suite (variations, limites...)

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. En déduire la monotonie de la suite (u_n) .

c) Montrer que la suite (u_n) converge. Que pensez vous de vos conjectures du 6°) a) ?


d) Donner une valeur approchée de la limite de la suite (u_n)





SOLUTION

Soit $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}^*$

1°) a) Dresser le tableau de valeurs de la suite (S_n) . On pourra afficher les 20 premiers termes

Tout d'abord il faut vérifier que le mode calcul de somme est activé. Dans le menu , appuyer sur

  et vérifier que Σ Display est bien sur ON

```
Σ Display : On
Draw Type : Connect
Graph Func : On
Dual Screen : Off
Frac Result : d/c
Simul Graph : Off
Background : None ↓
|On|Off
```

Puis on définit la suite $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La calculatrice affichera alors le tableau de




valeurs de la suite (a_n) ainsi que de la suite de terme général $\sum_{p=1}^n a_p$ c'est à dire $\sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$

```
Réurrence
an: 1÷n [-]
bn: [-]
cn: [-]

SEL> DEL TYPE n SET TABL
```

On appuis sur  () pour paramétrer les valeurs à afficher dans le tableau de valeurs :

```
Réglage Table n
Start: 1
End : 20
```

On obtient le tableau de valeurs suivant en appuyant sur  puis  () :

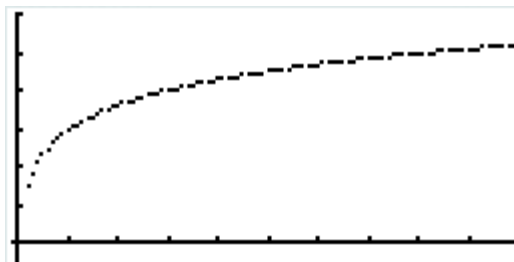
n	Δn	$\Sigma \Delta n$
1	1	1
2	0.5	1.5
3	0.3333	1.8333
4	0.25	2.0833
5	0.2	2.2833
6	0.1666	2.45
7	0.1428	2.5928
8	0.125	2.7178
9	0.1111	2.8289
10	0.1	2.9289
11	0.0909	3.0198
12	0.0833	3.1032
13	0.0769	3.1801
14	0.0714	3.2515
15	0.0666	3.3182
16	0.0625	3.3807
17	0.0588	3.4395
18	0.0555	3.4951
19	0.0526	3.5477
20	0.05	3.5977

1°) b) Afficher la représentation graphique du nuage de points formé par les 100 premiers termes de la suite (S_n) . Que pouvez-vous conjecturer sur la limite de cette suite ? A quelle fonction cela vous fait-il penser ?

Pour afficher le nuage de points représentant les termes de la suite (S_n) , on va paramétrer le menu **SET** pour avoir 100 points. On obtient l'écran suivant :



Appuyer alors sur **EXE**, **TABLE** (**F6**) puis **EDIT** (**F6**) et choisissez **$\Sigma \Delta n$** (**F6**). On obtient la représentation graphique suivante :



On a pris la fenêtre d'affichage suivante (**SHIFT** **V-Window** **F3**)



```
Fen-V
Xmin  :-1
max   :100
scale:10
dot   :0.8015873
Ymin  :-0.5
max   :6
INIT | TRIG | STD | STO | RCL
```

La suite semble diverger. On remarque que l'allure de la courbe ressemble à une fonction ln.

2°) Montrer que pour tout

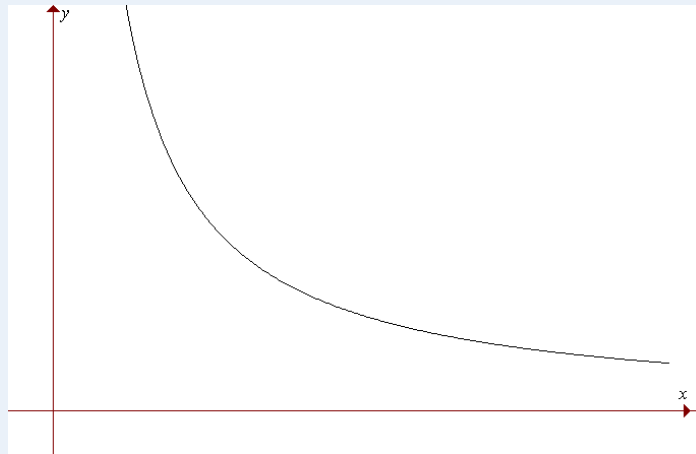
$n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

On pourra utiliser le fait que

la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est

décroissante sur $[n; n+1]$.



Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $[n; n+1]$.

Donc pour tout $x \in [n; n+1]$ on a $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ donc

$$\frac{1}{n+1}(n+1-n) \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}(n+1-n) \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

3°) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n+1)$

On sait que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \text{ donc } \sum_{p=1}^n \frac{1}{p+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

$$\text{soit } S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \text{ or } \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

ainsi l'inégalité devient $S_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq S_n$

donc $\ln(n + 1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n + 1) - \frac{1}{n + 1}$

d'où $\ln(n + 1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n + 1)$

4°) Que pouvez-vous en déduire sur la limite de la suite (S_n) ? Cela confirme-t-il votre conjecture du 1°) ?

On a vu dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $S_n \geq \ln(n + 1)$ or


$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n + 1) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$

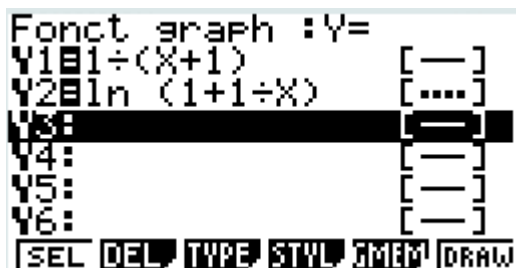
Oui cela confirme notre conjecture du 1°).

5°) a) Représenter graphiquement les fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x + 1} \text{ et } g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

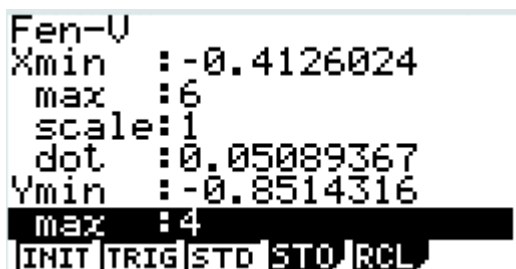
Que pouvez-vous conjecturer sur la position relative de ces deux courbes ?

Pour représenter graphiquement ces 2 courbes, dans le menu  entrer l'expression des deux fonctions :

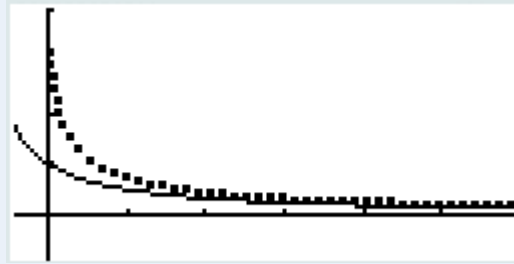


On a choisit de représenter la courbe de la fonction g en pointillés gras.

On choisit la fenêtre d'affichage graphique suivante :



On obtient les 2 courbes suivantes :



On peut conjecturer que C_g est au dessus de C_f sur $]0; +\infty[$.

5°) b) Soit $\varphi = f - g$. Dresser le tableau de variations de la fonction φ , puis démontrer votre conjecture précédente.

La fonction φ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2+1}$$

Or pour tout $x \in]0; +\infty[$, $(x+1)^2 \geq x^2 + 1$ donc $\varphi'(x) \geq 0$ ce qui prouve que φ est croissante sur $]0; +\infty[$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ce qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$

On en déduit que pour tout $x \in]0; +\infty[$ $\varphi(x) < 0$, donc $f(x) < g(x)$, ce qui prouve notre conjecture sur la position relative de C_f par rapport à C_g .

Conclusion : Pour tout $x \in]0; +\infty[$ $\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

6°) a) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = S_n - \ln(n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Dresser le tableau de valeurs de la suite (u_n) ainsi que sa représentation graphique. Que pouvez-vous conjecturer pour cette suite (variations, limites...)

On entre l'expression de la suite :

```
Récurrérence
an+1|an+1÷(n+1)  [—]
bn+1|an-ln n     [—]
cn+1|an-ln (n-1) [—]
SEL> DEL TYPE M.A.M. SET TABL
```

```
Réglage Table n+1
Start:1
End :20
a1 :1
b1 :0
c1 :0
anStr:0
|ao|a1
```

$n+1$	a_{n+1}	b_{n+1}
17	3.4395	0.5475
18	3.4951	0.5491
19	3.5477	0.5506
20	3.5977	0.552

FORM DEL WEB G·CON G·PLT 20



On peut conjecturer que la suite (u_n) converge.

6°) b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$. En déduire la monotonie de la suite (u_n) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= S_{n+1} - \ln(n+2) - (S_n - \ln(n+1)) = \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Or d'après 5°) b) $\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$ ainsi (u_n) est décroissante.

6°) c) Montrer que la suite (u_n) converge.

On sait d'après 3°) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n+1)$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq u_n \leq 1$, ce qui prouve que la suite (u_n) est minorée,

or elle est décroissante donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge.

Cela confirme notre conjecture du 6°) a).

6°) d) Donner une valeur approchée de la limite de la suite (u_n)

En reprenant le tableau de valeurs de la question 6°) a) pour $n = 100$ on obtient $\gamma \approx 0,572$