Suites et moyenne

NIVEAU

Première et Terminale S.

OBJECTIFS

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 2n - 56,\ n \in \mathbb{N}$.

Le but de cet exercice est de trouver l'expression explicite des suites (v_n) et (w_n) définie par :

$$v_n = \sum_{p=0}^{n} u_p \quad et \quad w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} v_p \quad ,n \in \mathbb{N}$$

eActivité CORRESPONDANTE

TP11.g1e

Exercice n°1 (TP11.g1e) **:**

1°) A l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement les 101 premiers termes de la suite (v_n).

2°) a) A quel type de courbe la représentation graphique du 1°) vous fait-elle penser ?

b) Que pouvez-vous conjecturer sur l'expression générale explicite de v_n en fonction de n ? (on pourra utiliser le tableau de valeurs ainsi que la résolution d'un système)

c) Démontrer votre conjecture en utilisant la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique…

3°) En utilisant le tableur de la Graph85, calculer les 100 premiers termes de v_n et de w_n puis représenter graphiquement la suite (w_n)

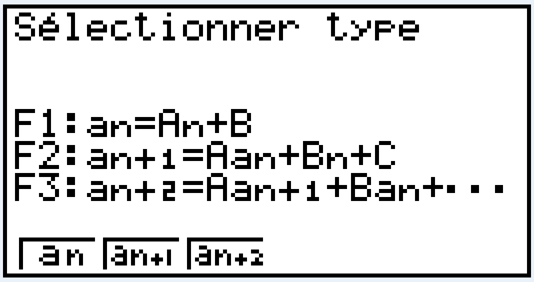
4°) a) A quel type de courbe la représentation graphique du 3°) vous fait-elle penser ?

b) Que pouvez-vous conjecturer sur l'expression générale explicite de w_n en fonction de n ? (on pourra utiliser l'outil d'ajustement quadratique de la Graph85 accessible par CALC x^2 une fois la représentation graphique affichée)

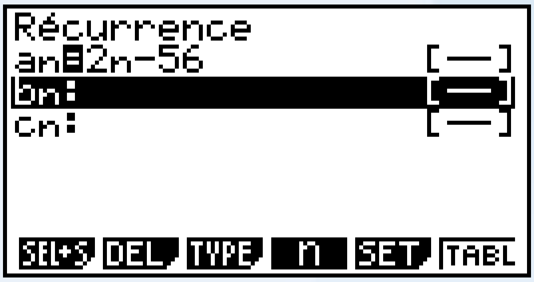
c) Valider votre conjecture par une récurrence.

1°) A l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement les 101 premiers termes de la suite (v_n).

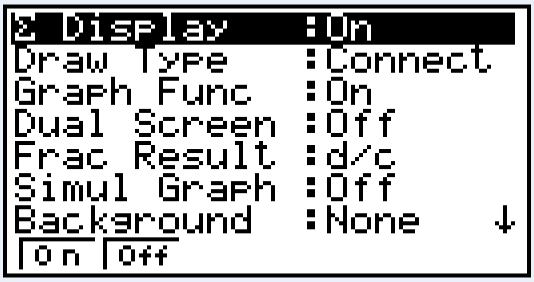
Dans le menu sélectionner RECUR .et appuyer sur TYPE et choisir F1 (suite définie de façon explicite)



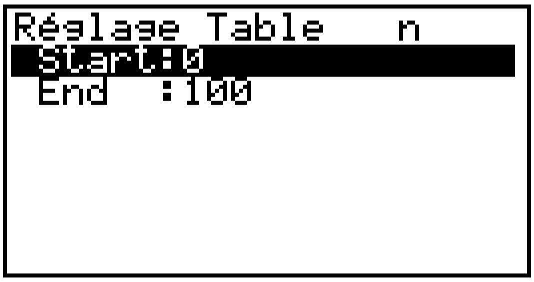
Entrer la suite (la variable n est obtenue en appuyant sur F1) :



Il faut indiquer à la Graph85 qu'on souhaite calculer la somme des termes de la suite. Pour cela appuyer sur SHIFT MENU pour accéder au SETUP du programme suite, puis vérifier que le champ Σ Display est sur On :



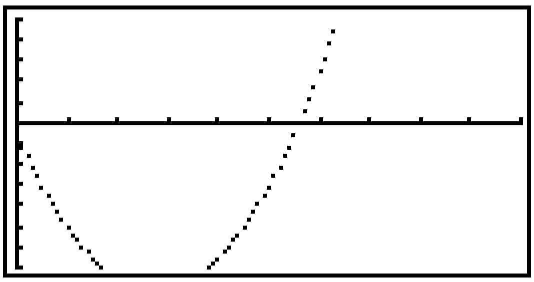
Pour indiquer à la calculatrice qu'on souhaite calculer les 100 premiers termes, appuyer sur SET (touche F5) pour régler la table puis compléter comme suit :



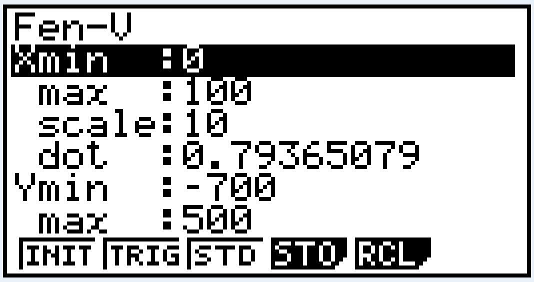
Valider puis appuyer sur TABL (touche F6) pour afficher le tableau de valeurs de la suite :

n	an	Σan
0	-56	-56
1	-54	-110
2	-52	-162
3	-50	-212
4	-48	-260
5	-46	-306
6	-44	-350
7	-42	-392
8	-40	-432
9	-38	-470
10	-36	-506

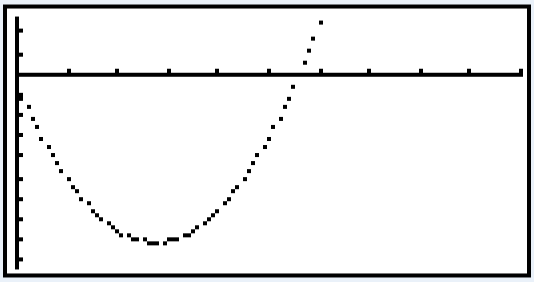
Pour obtenir le graphique (c'est-à-dire l'ensemble des points du plan de coordonnées (n, v_n)) appuyer sur G·PLT (touche F6) puis sur Σan (touche F6) pour représenter graphiquement de v_n.



On a choisit la fenêtre suivante :



A l'aide des flèches de direction on peut afficher toute la courbe (ici on a appuyé une fois sur ▼)



2°) a) A quel type de courbe la représentation graphique du 1°) vous fait-elle penser ?

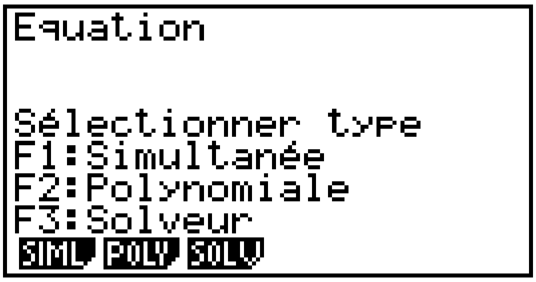
La courbe précédente nous fait penser à une parabole.

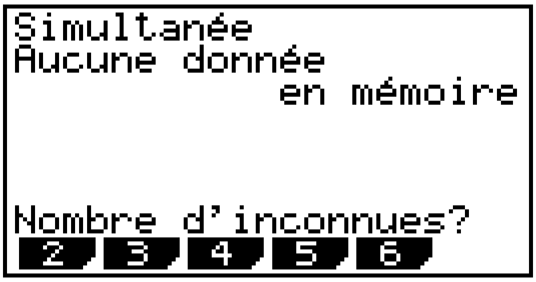
2°) b) Que pouvez-vous conjecturer sur l'expression générale explicite de v_n en fonction de n ? (on pourra utiliser le tableau de valeurs ainsi que la résolution d'un système)

D'après 2°) a) on peut conjecturer que l'expression générale de v_n est du type :
$v_n = an^2 + bn + c,\ n \in \mathbb{N}$. Avec a, b et c trois réels à déterminer.

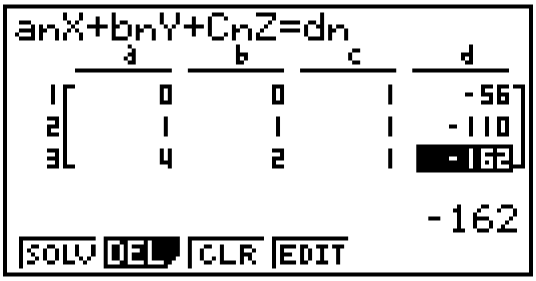
D'après le tableau de valeurs $\begin{cases} v_0 = -56 \\ v_1 = -110 \\ v_2 = -162 \end{cases}$ soit $\begin{cases} c = -56 \\ a + b + c = -110 \\ 4a + 2b + c = -162 \end{cases}$.

On va utiliser la Graph85 pour résoudre ce système : Dans le menu EQUA sélectionner Simultanée (touche F1) pour accéder à la résolution de système d'équations linéaires puis choisir 3 inconnues :

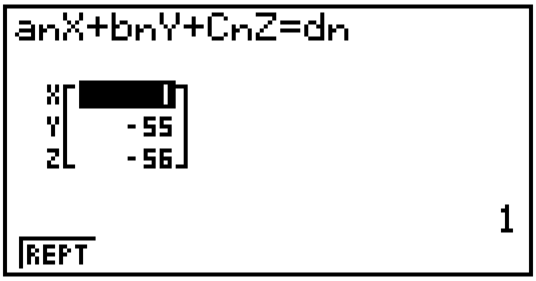




On entre les coefficients du système :



Puis on appuie sur SOLV pour obtenir les solutions :



Ainsi on peut conjecturer que l'expression explicite de v_n est : $v_n = n^2 - 55n - 56$, $n \in \mathbb{N}$

2°) c) Démontrer votre conjecture en utilisant la formule de la somme des termes d'une suite arithmétique…

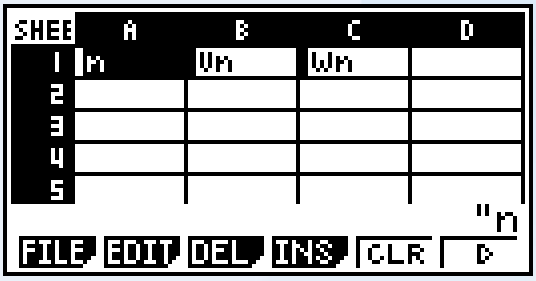
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = 2n - 56$, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 2.
Ainsi d'après le cours, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{-56 + 2n - 56}{2} = (n+1)(n-56) = n^2 - 55n - 56$$

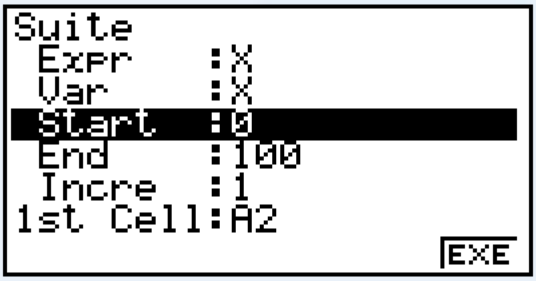
Notre conjecture du 2°) b) est bien démontrée.

3°) En utilisant le tableur de la Graph85, calculer les 100 premiers termes de v_n et de w_n puis représenter graphiquement la suite (w_n)

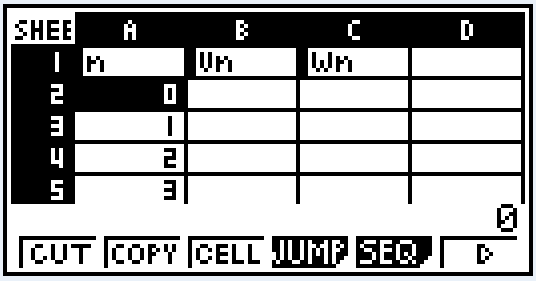
On commence par entrer tout d'abord le nom des colonnes (le texte dans une cellule doit commencer par un guillemet : ")



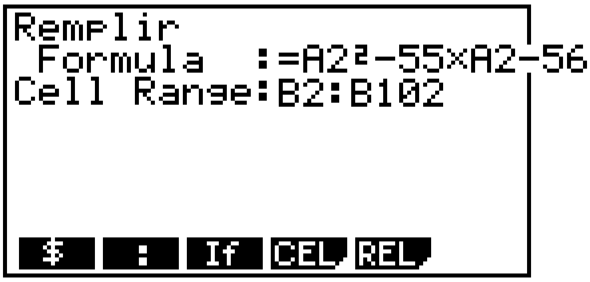
Pour entrer les valeurs de n de 0 à 100 on appuie sur EDIT SEQ puis on complète comme ci-contre



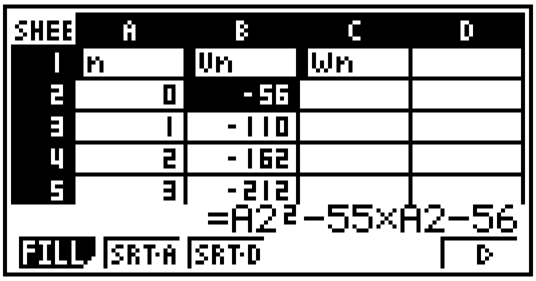
En validant sur EXE (touche F6) on obtient l'écran suivant :



Pour entrer les valeurs de v_n en utilisant la formule explicite : $v_n = n^2 - 55n - 56$ on peut utiliser aussi la fonction **SEQ**, mais ici nous allons utiliser la fonction **FILL** accessible en appuyant sur **EDIT** ▷ **FILL** puis compléter comme l'écran suivant :



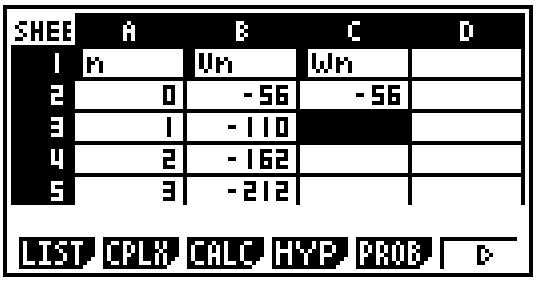
On obtient alors les termes de la suite (v_n) :



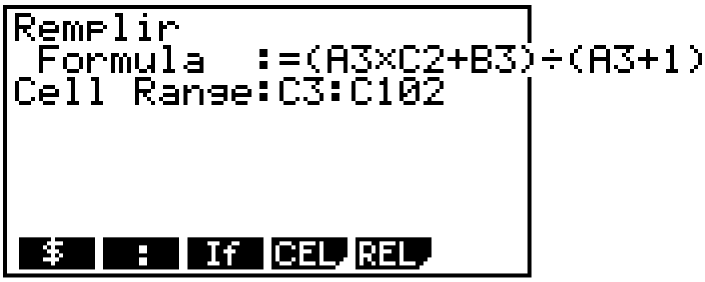
Pour afficher les termes de la suite (w_n) il faut trouver une relation définissant w_n par récurrence :

On a $w_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}\displaystyle\sum_{p=0}^{n+1} v_p = \dfrac{1}{n+2}\left(v_{n+1} + \displaystyle\sum_{p=0}^{n} v_p\right) = \dfrac{1}{n+2}\left(v_{n+1} + (n+1)w_n\right)$

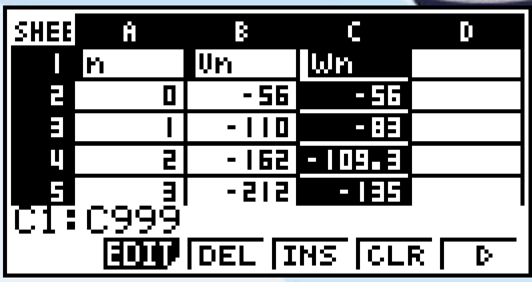
On entre w_0 le premier terme de la suite (w_n) dans la cellule C2. Puis on va, grâce à la relation de récurrence précédente, calculer les autres termes de la suite en utilisant une formule dans le tableur.



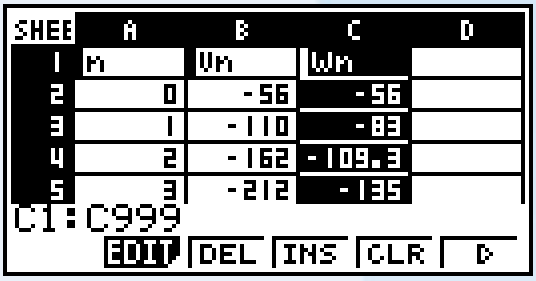
A l'aide de la fonction **FILL** on entre la formule suivante :



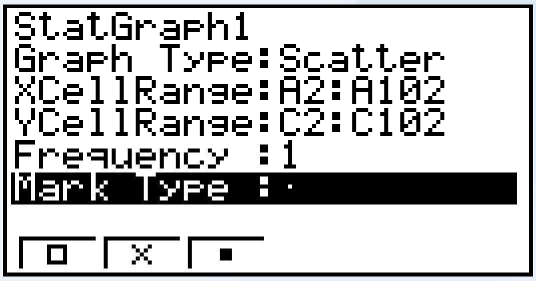
On obtient ainsi les valeurs de w_1 à w_{100} :



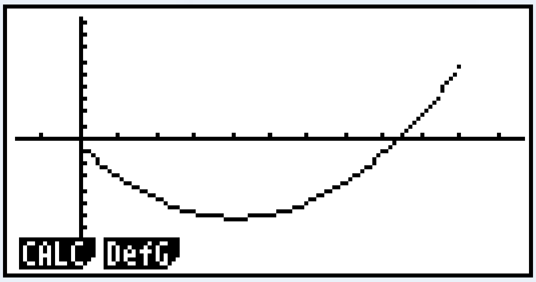
Pour représenter graphiquement les termes de la suite (w_n) on sélectionne toute la colonne en plaçant le sélecteur de cellule tout en haut de la colonne C puis on clique sur ▷ GRPH SET



Vérifier alors que le type de graphique choisit est bien Scatter ainsi que la bonne plage pour les abscisses et les ordonnées :



Puis on valide et on appuie sur GPH1 pour obtenir la représentation graphique suivante :

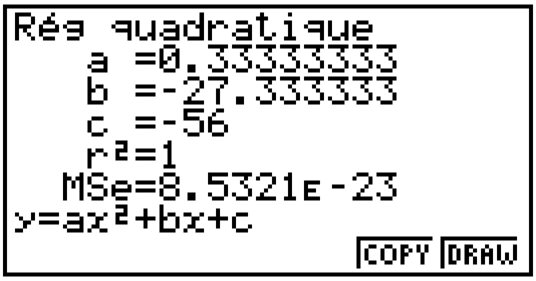


4°) a) A quel type de courbe la représentation graphique du 3°) vous fait-elle penser ?

La courbe précédente nous fait penser à une parabole.

4°) b) Que pouvez-vous conjecturer sur l'expression générale explicite de w_n en fonction de n ? (on pourra utiliser l'outil d'ajustement quadratique de la Graph85 accessible par CALC X^2 une fois la représentation graphique affichée)

Comme nous le suggère l'énoncé, appuyons sur CALC X^2, l'écran suivant s'affiche :



Ainsi la Graph85 nous permet de conjecturer que l'expression explicite de w_n est :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} \;\; w_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{82}{3}n - 56$$

4°) c) Valider votre conjecture par une récurrence.

On va démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $w_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{82}{3}n - 56$:

Montrons que la proposition est vraie au rang 0 :

On a $\frac{1}{3} \times 0^2 - \frac{82}{3} \times 0 - 56 = -56 = w_0$. La proposition est vraie au rang 0.

Supposons que la proposition est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ fixé, et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$:

$$\text{On a } w_{n+1} = \frac{1}{n+2}\left(v_{n+1} + (n+1)w_n\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left((n+1)^2 - 55(n+1) - 56 + (n+1)\left(\frac{1}{3}n^2 - \frac{82}{3}n - 56\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{3}n^3 - 26n^2 - \frac{409}{3}n - 166\right) = \frac{1}{n+2}\left(\frac{1}{3}(n+2)(n^2 - 80n - 249)\right)$$

$$= \frac{1}{3}(n^2 - 80n - 249)$$

$$\text{Or } \frac{1}{3}(n+1)^2 - \frac{82}{3}(n+1) - 56 = \frac{1}{3}(n^2 - 80n - 249) = w_{n+1}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $w_n = \frac{1}{3}n^2 - \frac{82}{3}n - 56$