



## Circuit RC et recherche d'une fonction exponentielle

### NIVEAU

Première et Terminale S.

### OBJECTIFS

Se servir du tableur (SpreadSheet), puis des différents outils statistiques et graphiques, dans le but de retrouver l'expression algébrique d'une fonction dont on connaît un nuage de points associé à sa courbe représentative. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = 2n - 56$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

On se place dans le cadre des circuits RC. En effet, on se donne une **fem** (Force Électro Motrice) de E Volts, une résistance de R ohms, ainsi qu'un condensateur de capacité C Farads. Puis, à partir d'un voltmètre relevant la tension aux bornes du condensateur, toutes les 0,2ms, on conjecture et on affine un ajustement de cette tension afin d'en déterminer précisément l'expression de cette tension en fonction du temps.

L'usage de la calculatrice se révélera pertinent pour représenter le nuage et déterminer le type d'ajustement le plus adapté.

### E-Activité CORRESPONDANTE

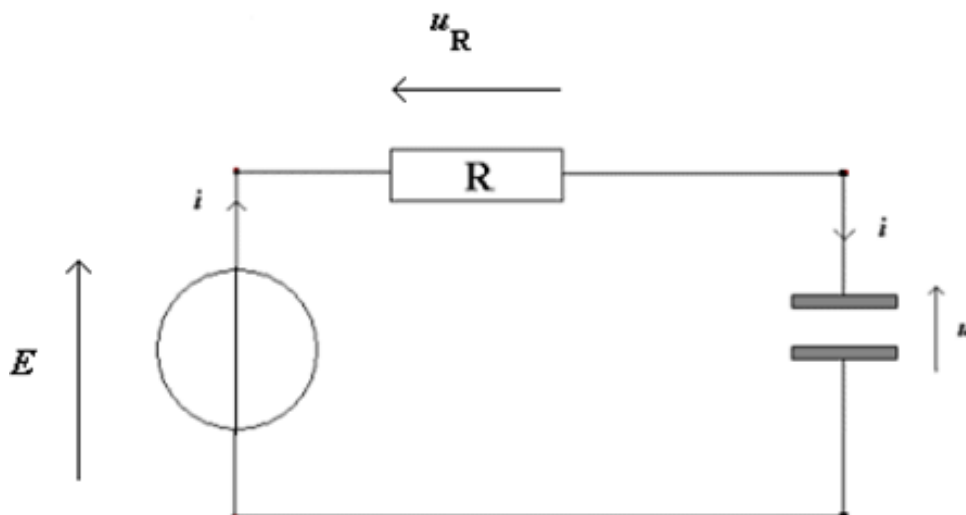
TP12.g1e

**Exercice (STATCAPA.g1e):**

On considère le circuit ci-contre :

La force électromotrice (fem) est de 6 Volts, la résistance de R Ohms, et le condensateur de capacité C Farad.


On note alors  $u(t)$  la tension aux bornes de ce condensateur, à l'instant  $t$ .



On suppose qu'à l'instant  $t = 0$ , il n'y a pas de courant dans le circuit, et donc pas de tension non plus. Voici, dans le tableau ci-dessous, grâce à un voltmètre mesurant toutes les 0,2ms, les différentes valeurs de  $u(t)$ , que l'on a pu alors relever.

$t$ en ms	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$u(t)$ en V	0	1,1	2	2,7	3,3	3,8	4,2	4,5	4,8	5	5,2	5,3	5,5	5,6	5,6	5,7

Le but de cet exercice est de déterminer une expression algébrique cohérente de  $u$  en fonction de  $t$ , que l'on suppose être une fonction dérivable sur  $[0; +\infty[$

1°) Dans le mode  de la calculatrice, afficher, dans deux colonnes les données statistiques du tableau précédent.

2°) a) Afficher le nuage de points obtenu.

b) Conjecturer le comportement de  $u(t)$ , pour  $t \in [0; +\infty[$ .

c) Un ajustement affine vous paraît-il envisageable ?

d) Peut-on, à l'aide du tableur, montrer directement que cette progression est exponentielle ?

3°) Utiliser un ajustement exponentiel à la quantité  $6 - u(t)$ . Que remarquez-vous ?

4°) On admet que la fonction  $u$  est solution du problème différentiel suivant :

$$\tau u'(t) + u(t) = 6 \text{ et } u(0) = 0 \text{ avec } \tau = RC$$


Résoudre cette équation, et en déduire la valeur de  $RC$ .

5°) On estime que le condensateur est chargé, lorsqu'il est chargé à 95%. Au bout de combien de temps peut-on le considérer comme chargé ?

# 1<sup>re</sup>/Terminale S

Graph 85/85 SD



1°) Dans le mode  de la calculatrice, afficher, dans deux colonnes les données statistiques du tableau précédent.

Tout d'abord, sélectionner le menu du tableur : r, c'est-à-dire le menu 4.

Sauvegarder le fichier le nommant, afin de ne pas le perdre ; pour cela appuyer sur les touches **FILE** (touche q) puis **SU-AS** (touche e) et entrer le nom de la feuille de calcul (ici on l'a appelé TENSION).

```
Spread Sheet Name  
[TENSION ]
```

On entre alors les deux colonnes de valeurs associées au tableau des données.

La suite  $(t_n)$  étant une progression arithmétique de raison  $2 \cdot 10^{-4}$  ms, on va utiliser la fonction sequence, en appuyant sur **EDIT** (touche **F2**), puis sur **SEQ** (touche **F5**). On complète comme indiqué ci-dessous :

```
Sequence  
Expr   : 0.0002N  
Var    : N  
Start  : 0  
End    : 15  
Incre  : 1  
1st Cell: A2  
EXE
```

TEN	A	B	C	D
1	T			
2	0			
3	2E-4			
4	4E-4			
5	6E-4			

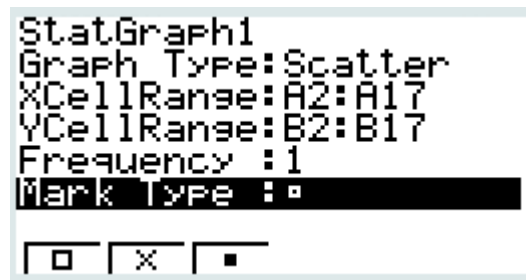
6E-04  
FILE EDIT DEL INS CLR D

2°) a) Afficher le nuage de points obtenu.

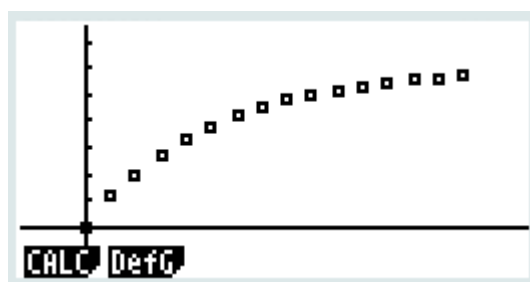
On va représenter graphiquement le nuage de points dont les abscisses seront les différentes valeurs des cellules de la colonne A et les ordonnées celles des cellules de la colonne B.

Pour cela on appuie sur **GRAPH** (touche **F1**) puis on vérifie que le graphique 1 est bien actif en appuyant sur **SEL** (touche **F4**). Appuyer sur **EXIT**, puis sur **SET** (touche **F6**).

On définit alors la plage de cellules permettant de construire ce nuage de points (la liste des valeurs abscisses, et celle associée aux ordonnées), ainsi que le type de graphique :



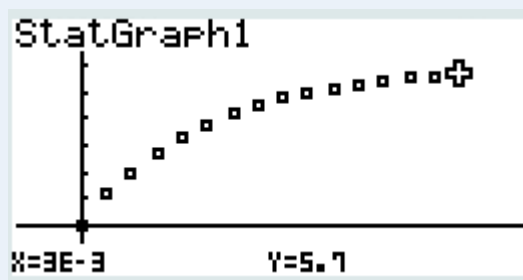
Pour lancer la représentation graphique, appuyer sur **EXIT**, puis sur **GRAPH1** (touche **F1**) :





2°) b) Conjecturer le comportement de  $u(t)$ , pour  $t \in [0; +\infty[$ .

La fonction  $u$  semble croissante, positive et atteindre une valeur limite qui serait justement la valeur de la force électromotrice : 6V, dans la mesure où la tension croit de moins en moins à intervalle de temps régulier.

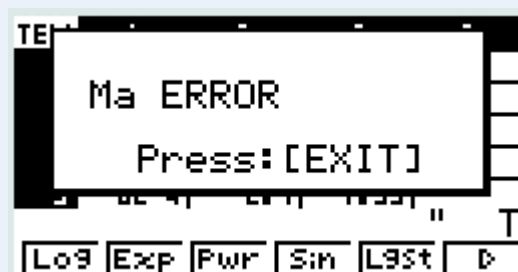


2°) c) Un ajustement affine vous paraît-il envisageable ?

Etant donné que la fonction semble atteindre une valeur limite, la progression ne peut pas être linéaire ou affine. Il faut donc envisager un autre type d'ajustement.

2°) d) Peut-on, à l'aide du tableur, montrer directement que cette progression est exponentielle ?

Si on essaye un ajustement exponentiel, la calculatrice répond par une erreur :



Ainsi le nuage de points n'a pas une allure qui correspond à une courbe dont l'équation est du type :

$$y = a e^{bt}, \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux constantes réelles.}$$

Ce qui se conçoit effectivement bien.

On s'intéresse donc à la quantité  $6 - u(t)$ , qui se trouve alors être proche d'une fonction décroissante, positive, et proche d'une fonction du type

$$t \rightarrow a e^{bt}$$

Ce qui permettrait de décider si ajustement exponentiel est légitime ou non.

**3°) Utiliser un ajustement exponentiel à la quantité  $6 - u(t)$ . Que remarquez-vous ?**

On obtient le résultat suivant :

```
ExpReg
a =6.00733049
b =-1003.0524
r =-0.9998981
r²=0.99979628
MSe=1.9914E-04
y=a·e^bx
```

COPY

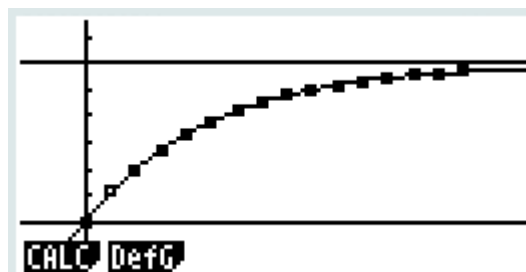
Le coefficient de corrélation nous conforte dans ce choix. Et il semble alors, vu les données du problème d'en déduire comme expression de  $6 - u(t)$ , l'expression suivante :

$$6 - u(t) = 6 e^{-1000 t}$$

Et par conséquent,

$$u(t) = 6(1 - e^{-1000 t})$$

On peut alors tracer la représentation graphique de cette fonction et la comparer avec le nuage de départ. Voici ce que l'on obtient :





4°) Résoudre l'équation différentielle, et en déduire la valeur de  $RC$ .

On sait, d'après le cours de terminale S, que les fonctions solutions de l'équation différentielle

$$\tau u'(t) + u(t) = 6 \text{ et } u(0) = 0$$

sont de la forme :

$$u: t \rightarrow k e^{-\frac{t}{\tau}} + 6$$

De plus  $u(0) = 0$ , on en déduit alors que  $k = -6$ , ainsi :

$$\text{Pour tout } t \in \mathbb{R} \text{ on a : } u(t) = -6 e^{-\frac{t}{\tau}} + 6 = 6 \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Ce qui permet de remarquer alors que dans notre cas, la constante  $\tau$  vaut  $10^{-3}$ . Autrement dit :  
 $RC = 10^{-3}$

5°) On estime que le condensateur est chargé, lorsqu'il est chargé à 95%. Au bout de combien de temps peut-on le considérer comme chargé ?

Pour conclure, il suffit d'observer le tableau de valeurs associée à notre fonction  $u$ , afin de remarquer à partir de quel instant, la tension atteint 95% de la **fem**.

Affichons le tableau de valeurs de la fonction  $u$  :

```
Table Func :Y=
Y1=6(1-e^(-1000X[—])
Y2=Y1÷6×100 [.....]
Y3=6 [—]
Y4: [—]
Y5: [—]
Y6: [—]
[SEL] [DEL] [TYPE] [STYL] [SET] [TABL]
```

On obtient le tableau de valeurs suivant :

Y2=Y1÷6×100

X	Y1	Y2	Y3
2.8E-3	5.6351	93.918	6
2.9E-3	5.6698	94.497	6
3E-3	5.7012	95.021	6
3.1E-3	5.7297	95.495	6

95.02129316

FORM DEL RUN EDIT G·CON G·PLT

On remarque que, d'après le tableau, cette valeur semble être proche de  $3\tau$

Par le calcul, on résout une inéquation, qui donne comme résultat :

$$t \geq \frac{\ln 20}{1000}$$