Introduction aux propriétés algébriques des fonctions hyperboliques.

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

Il s'agit dans ce TP de se servir des fonctionnalités du tableur de la Graph85 afin de découvrir des propriétés algébriques, telles que les propriétés d'additions et de duplications des fonctions hyperboliques, à un niveau terminale S, là où l'élève ne connaît pas encore ces fonctions , mais peut sans grande difficulté, les découvrir.

E-Activité CORRESPONDANTE

TP13.g1e

Exercice (TP13.g1e):

Pour tout réel x, on définit les deux fonctions C et S suivantes :

$$C(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad S(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Le but de cet exercice est d'étudier ces deux fonctions, et montrer qu'elles satisfont des propriétés algébriques caractéristiques, semblables aux propriétés algébriques des fonctions trigonométriques

1°) Comment générer aléatoirement un réel compris (strictement) entre -10 et 10. Puis faire en sorte, que son affichage n'excède pas un chiffre après la virgule.

2°) a) Dans le menu S-SHT, afficher une colonne de 20 valeurs aléatoires (x_i) comprises entre -10 et 10 comme dans la question précédente, puis dans trois colonnes à suivre, les images de ces valeurs par les fonctions C, S et exp.

b) Tracer les courbes représentatives des deux fonctions C et S.

c) Déterminer le tableau de variation et les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions S et C.

3°) À l'aide du mode , déterminer une relation semblable à la relation fondamentale liant les fonctions cos et sin. Démontrer alors cette propriété.

4°) A l'aide du tableur de la calculatrice, montrer que des "formules d'additions" semblables à celles liant les fonctions cos et sin, lient les fonctions C et S. Démontrer ensuite ces propriétés.

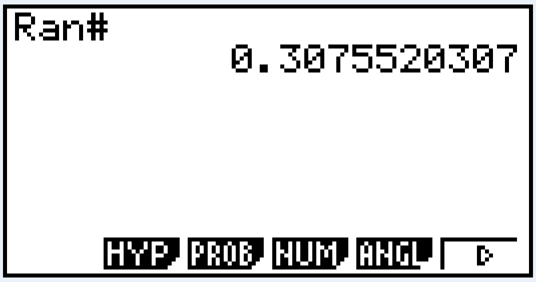
5°) Démontrer les relations établies précédemment.

1°) Comment générer aléatoirement un réel compris (strictement) entre -10 et 10. Puis faire en sorte, que son affichage n'excède pas un chiffre après la virgule.

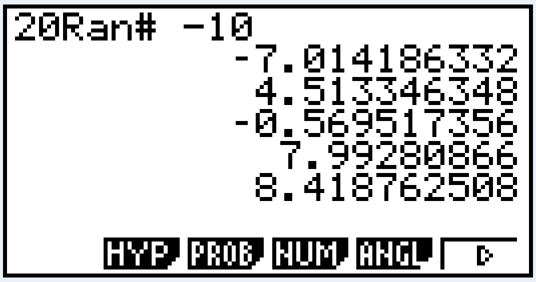
On commence par entrer dans le mode RUN.

Pour obtenir un nombre aléatoire, on utilise la fonction Ran# accessible en appuyant sur les touches OPTN ▷ PROB Ran#.

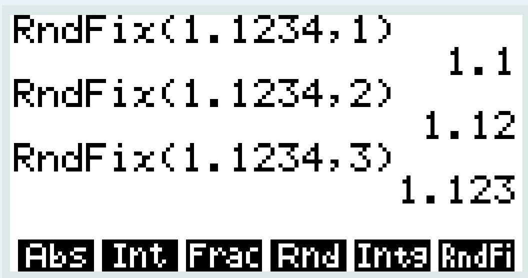
La Graph85 retourne un nombre aléatoire compris entre 0 et 1.



Or si $0 < x < 1$ alors $0 < 20x < 20$ et donc $-10 < 20x - 10 < 10$.



Afin d'exploiter seulement 1 chiffre après la virgule, on va utiliser la fonction RndFi.

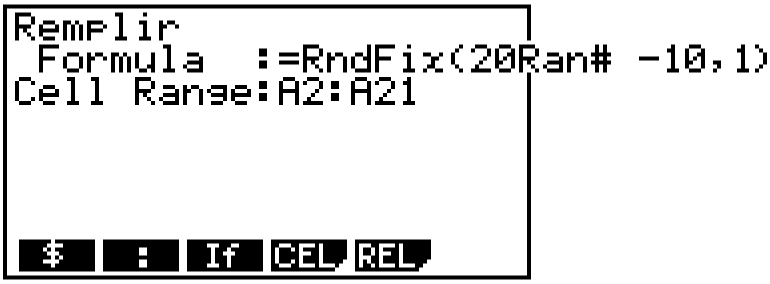


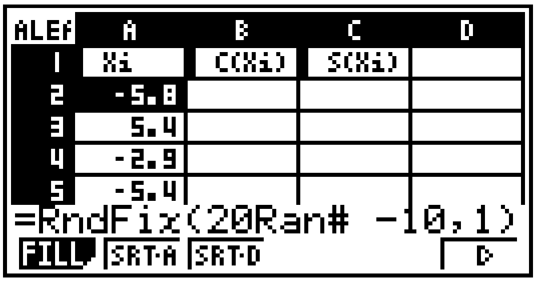
2°) a) Dans le menu S·SHT, afficher une colonne de 20 valeurs aléatoires (x_i) comprises entre -10 et 10 comme dans la question précédente, puis dans trois colonnes à suivre, les images de ces valeurs par les fonctions C, S et exp.

Ouvrir le tableur en appuyant sur S·SHT. Sauvegarder le fichier afin de ne pas le perdre ; pour cela appuyer sur les touches FILE (touche F1) puis SV·AS (touche F3) et entrer le nom de la feuille de calcul.

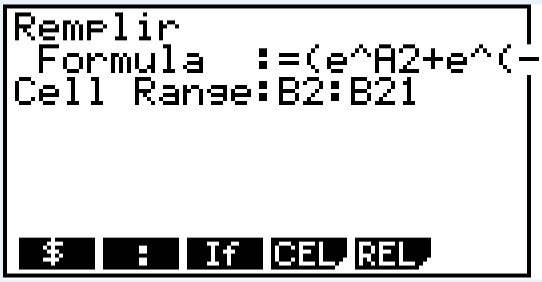
On va entrer la formule précédente pour les cellules A2 à A21 :

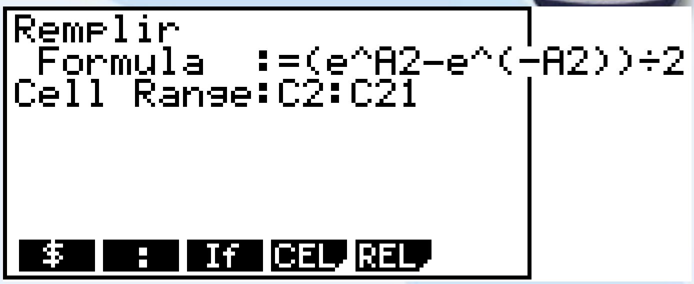
Appuyer sur EDIT ▷ FILL puis compléter la boit de dialogue comme suit, puis valider en appuyant sur EXE :

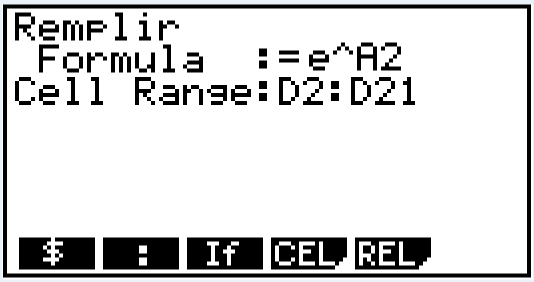




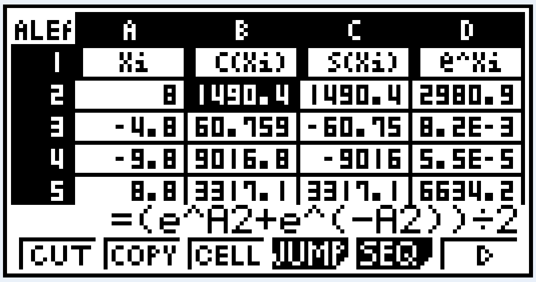
Puis on calcul dans les colonnes B, C et D les images des valeurs de la colonne A par les fonctions C, S et exp, respectivement. On peut utiliser à nouveau la commande FILL :







On obtient alors l'écran suivant :

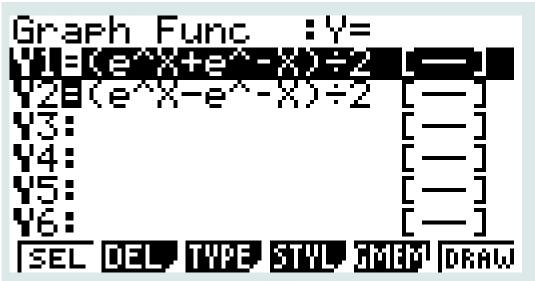


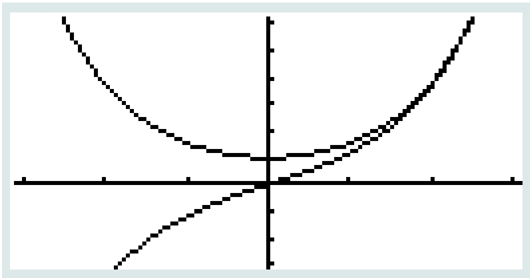
On remarque alors quelque chose d'intéressant, et logique…

$$C(x)+S(x)=e^x$$

2°) b) Tracer les courbes représentatives des deux fonctions C et S.

Dans le menu , on entre les deux fonctions et on obtient :





2°) c) Déterminer le tableau de variation et les limites en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions S et C.

Étude de la fonction C :

Pour tout $x \in \mathbb{R}, C(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = C(x)$

Donc C est une fonction paire, sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction $x \mapsto e^{-x}$, donc C est dérivable sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}, C'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Etudions le signe de $C'(x)$:

$\dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \geq 0 \Leftrightarrow\ e^x - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq e^{-x} \Leftrightarrow x \geq -x \Leftrightarrow 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

Doc la fonction C est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0\ \ et\ \ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} C(x) = +\infty$.

De plus par parité on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = +\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de C'		$-$	0	$+$	
C	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Étude de la fonction S :

Pour tout $x \in \mathbb{R}, S(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -S(x)$

Donc S est une fonction impaire, sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction $x \mapsto e^{-x}$, donc S est dérivable sur $\mathbb{R}$:

Pour tout $x \in \mathbb{R}, S'(x) = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$. Etudions le signe de $S'(x)$:

On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}\ e^x > 0$ de même $e^{-x} > 0$ donc $S'(x) > 0$

La fonction S est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\ \ et\ \ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} S(x) = -\infty$. S est impaire donc $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = +\infty$

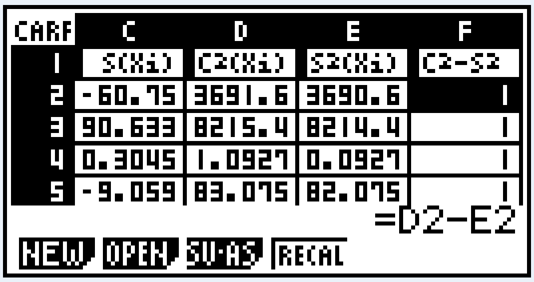
x	$-\infty$	0	$+\infty$
signe de S'		$+$	
S	$-\infty$		$+\infty$

3°) À l'aide du mode S·SHT, déterminer une relation semblable à la relation fondamentale liant les fonctions cos et sin. Démontrer alors cette propriété.

La relation fondamentale liant les fonction cos et sin est:

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}\quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

S'il existe donc une relation semblable au sein des fonctions C et S, on va tout d'abord déterminer les valeurs de $C^2(x)$ et $S^2(x)$ pour les valeurs de x des la colonne A du tableur :



CARF	C	D	E	F
1	S(Xi)	C²(Xi)	S²(Xi)	C²-S²
2	-60.75	3691.6	3690.6	1
3	90.633	8215.4	8214.4	1
4	0.3045	1.0927	0.0927	1
5	-9.059	83.075	82.075	1

=D2-E2

NEW OPEN SV·AS RECAL

On peut donc conjecturer que $C^2(x) - S^2(x) = 1$. On peut vérifier cette relation à l'aide d'autres valeurs en appuyant sur FILE (touche F1) et RECAL (touche F4). Ainsi d'autres valeurs aléatoires vont être générées et le tableur va recalculer automatiquement toutes les autres cellules.

Démontrons cette égalité : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$C^2(x) - S^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

4°) A l'aide du tableur de la calculatrice, montrer que des "formules d'additions" semblables à celles liant les fonctions cos et sin, lient les fonctions C et S. Démontrer ensuite ces propriétés.

Dans une nouvelle feuille du tableur, on va créer deux colonnes X_i et Y_i de valeurs aléatoires comprises entre -3 et 3, puis on va calculer respectivement $C(X_i), C(Y_i), S(X_i)$ et $S(Y_i)$ dans un premier temps :

ADD	A	B	C	D	E	F
1	Xi	Yi	C(Xi)	C(Yi)	S(Xi)	S(Yi)
2	-0.814	1.4932	1.3502	2.3381	-0.907	2.1135
3	-1.827	2.8115	3.1901	8.3481	-3.029	8.288
4	-0.037	2.071	1.0007	4.0295	-0.037	3.9034
5	-2.87	-2.185	8.8533	4.5024	-8.796	-4.39

=6Ran# −3

FILE EDIT DEL INS CLR ▷

Puis on calcul $C(X_i + Y_i)$ ainsi que les produits $C(X_i) \times C(Y_i)$ et $S(X_i) \times S(Y_i)$

ADD	F	G	H	I
1	S(Yi)	C(X+Y)	CX×CY	SX×SY
2	2.5002	12.228	6.6168	5.6118
3	-9.862	48.559	25.348	23.21
4	0.1368	3.2485	3.7361	-0.487
5	-1.569	1.3411	7.2516	-5.91

=E5×F5

NEW OPEN SV·AS RECAL

Il semblerait que $C(X_i + Y_i) = C(X_i).C(Y_i) + S(X_i).S(Y_i)$. On va donc créer une colonne somme :

ADD	G	H	I	J
1	C(X+Y)	CX×CY	SX×SY	H+I
2	12.228	6.6168	5.6118	12.228
3	48.559	25.348	23.21	48.559
4	3.2485	3.7361	-0.487	3.2485
5	1.3411	7.2516	-5.91	1.3411

=H2+I2

NEW OPEN SV·AS RECAL

Les résultats des colonnes G et J sont identiques, ce qui confirme notre conjecture précédente.

On procède de la même façon avec la fonction S :

ADD	K	L	M	N
1	S(X+Y)	SX×CY	SY×CX	L+M
2	12.187	6.044	6.1436	12.187
3	-48.54	-23.32	-25.21	-48.54
4	-3.09	-3.597	0.5064	-3.09
5	0.8936	7.0088	-6.115	0.8936

=L2+M2

NEW OPEN SV·AS RECAL

Ce qui permet de conjecturer que $S(X_i+Y_i)=S(X_i).C(Y_i)+C(X_i).S(Y_i)$

5°) Démontrer les relations établies précédemment.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$C(x)C(y)+S(x)S(y)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\times\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\times\frac{e^y-e^{-y}}{2}=\frac{1}{4}\left(2e^{x+y}+2e^{-(x+y)}\right)$$
$$=C(x+y)$$

$$C(x)S(y)+S(x)C(y)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\times\frac{e^y-e^{-y}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\times\frac{e^y+e^{-y}}{2}=\frac{1}{4}\left(2e^{x+y}-2e^{-(x+y)}\right)$$
$$=S(x+y)$$

Les fonctions C et S se nomment en fait respectivement, cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique et se notent respectivement : *ch* et *sh*. On les retrouvent dans la Graph85 dans le menu RUN, en appuyant sur OPTN, ▷ (touche F6) et HYP (touche F2).