



Homothéties et cercles

NIVEAU

Première et Terminale S.

OBJECTIFS

Soit C_1 et C_2 deux cercles de rayon respectifs R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$). On suppose que C_1 et C_2 sont sécants en deux points distincts.

On va rechercher les homothéties qui transforment le cercle C_1 en C_2 .

On utilisera le module de géométrie de la Graph85 pour résoudre cet exercice et conjecturer les solutions.

Exercice n°1 :

1°) Construire la figure

2°) Soit C un point du cercle C_1 et h une homothétie qui transforme C_1 en C_2 . Construire l'image de C par h . On montrera qu'il y a deux possibilités.

3°) On suppose dans cette question que le rapport de h est un réel noté k qui vérifie $k > 0$. En déduire $h(C)$ ainsi que la construction de H le centre de h .

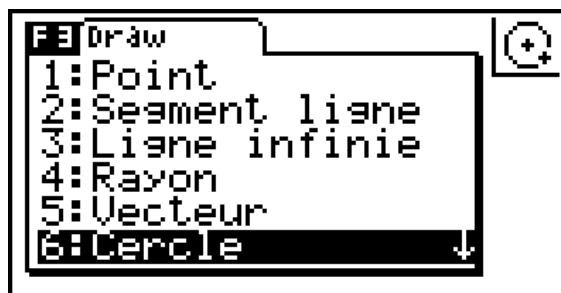
4°) Créer une animation en déplaçant le point C sur le cercle C_1 . Que pouvez-vous conjecturer sur l'emplacement du point H ?

5°) Exprimer H comme barycentre des points A et B puis démontrer votre conjecture du 4°).

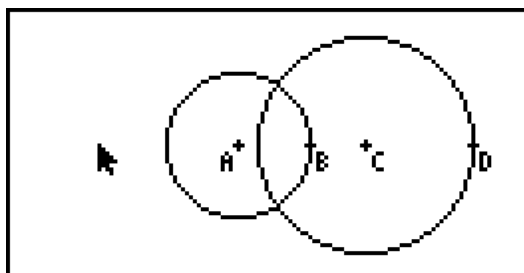
1°) Construire la figure

On va tout d'abord dans le menu géométrie 

Appuyer sur **F3** puis sélectionner **Cercle** dans le menu :



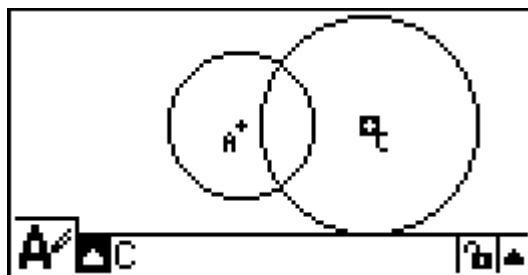
Tracer 2 cercles comme l'indique l'énoncé :



On va cacher l'affichage des points B et D puis renommer C en B .

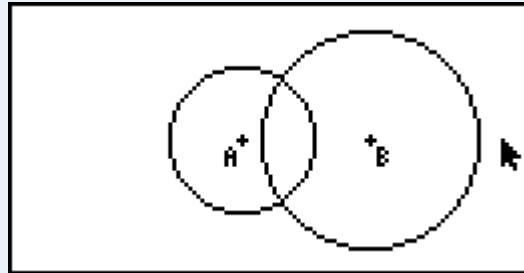
Pour cela on va sélectionner le point B puis appuyer sur **OPTN** et **Masquer**, et faites de même avec le point D .

Pour renommer le point C en B , sélectionner le point C puis appuyer sur **VAR** **◀** **EXE** **▲** **EXE**.



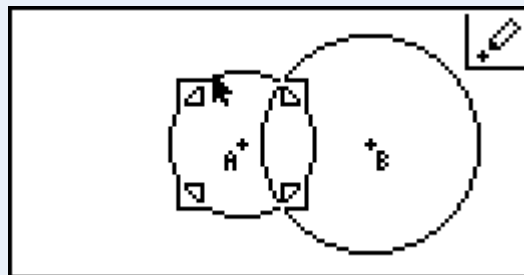


Puis sur \blacktriangleright B [EXE]. Enfin appuyer sur [EXIT] pour retourner en mode plein écran. On obtient l'écran suivant :

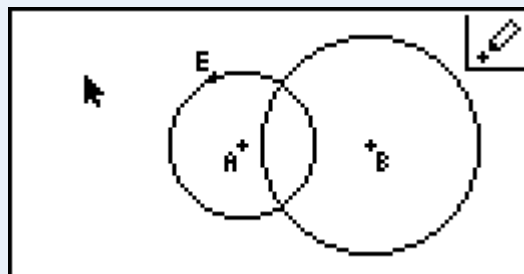


2°) Soit C un point du cercle C_1 et h une homothétie qui transforme C_1 en C_2 . Construire l'image de C par h . On montrera qu'il y a deux possibilités.

Traçons C un point de C_1 , pour cela on appuie sur [F3] puis sélectionner **Point**. Placer votre curseur jusqu'à ce que le cercle C_1 soit sélectionné (un carré indiquant que votre curseur pointe sur le cercle va apparaître), ainsi vous placerez de façon certaine votre point sur le cercle C_1 .



Valider en appuyant sur [EXE].



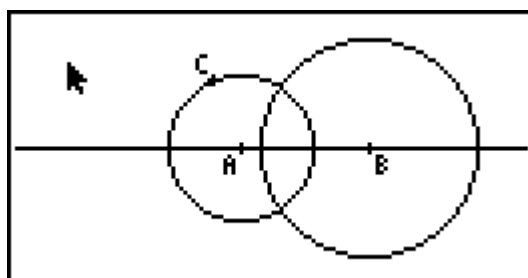
On renomme le point E en C en utilisant la procédure ci-dessus.

On sait d'après le cours que l'image d'un cercle de centre O et de rayon r par une homothétie de rapport k est un cercle de centre $O' = h(O)$ et de rayon $|k|r$. Donc $B = h(A)$.

De plus un point, son image par h et le centre de h sont toujours alignés.

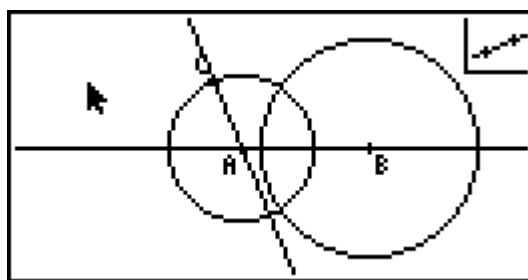
Soit H le centre de l'homothétie h qui transforme C_1 en C_2 . On a H, A et B alignés ainsi $H \in (AB)$.

Traçons la droite (AB) :



De plus l'image de (AC) par h est une droite qui lui est parallèle et qui passe par B . Traçons cette droite :

On trace tout d'abord la droite (AC) :



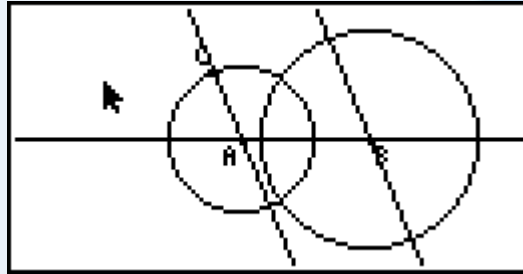
Appuyer sur **EXIT** pour sortir du mode « tracé de droite » (et revenir par défaut au mode sélection d'objet).

Sélectionner la droite (AC) et le point B puis appuyer sur **F4** et **Parallèle**.

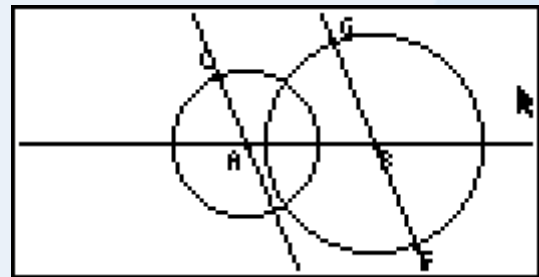
*Astuce : Pour tout désélectionner sans passer par les menus, appuyer sur **AC/ON**.*



On obtient l'écran suivant :



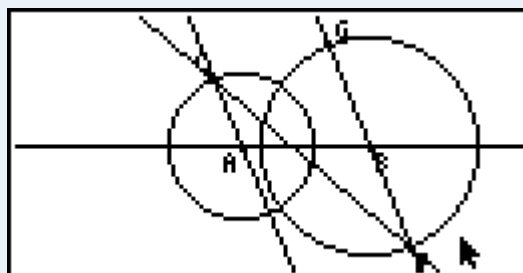
Nommons G et F les deux points d'intersection de la parallèle à (AC) passant par B avec le cercle C_2 : Sélectionner le cercle C_2 et la parallèle à (AC) passant par B , puis appuyer sur **F4** et **Intersection**.



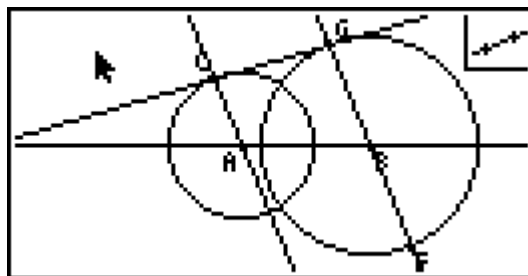
On sait que l'image de (AC) par h est la droite (FG) et que l'image de C appartient à C_2 donc soit $h(C) = G$, soit $h(C) = F$.

3°) On suppose dans cette question que le rapport de h est un réel noté k qui vérifie $k > 0$. En déduire $h(C)$ ainsi que la construction de H le centre de h .

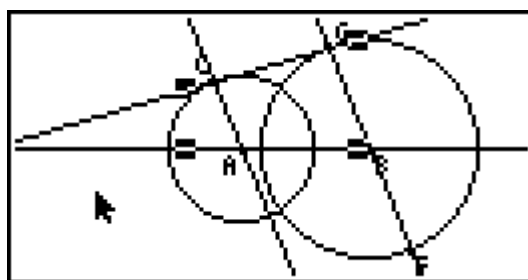
On sait que $h(A) = B$ donc $H \in (AB)$. Si $h(C) = F$ alors $H \in (AB) \cap (CF)$:



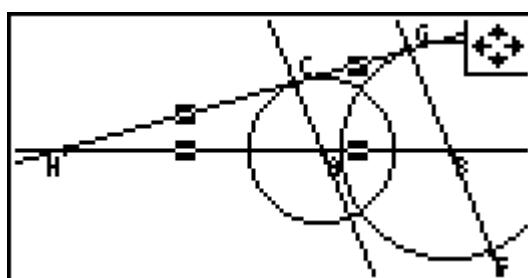
Donc $H \in [AB]$ ce qui est impossible car $k > 0$. Ce qui prouve que $h(C) = G$ d'après la question précédente.



$H \in (AB) \cap (CG)$. Pour le tracer, on sélectionne les droites (AB) et (CG) puis on appuie sur **F4** et **Intersection**.



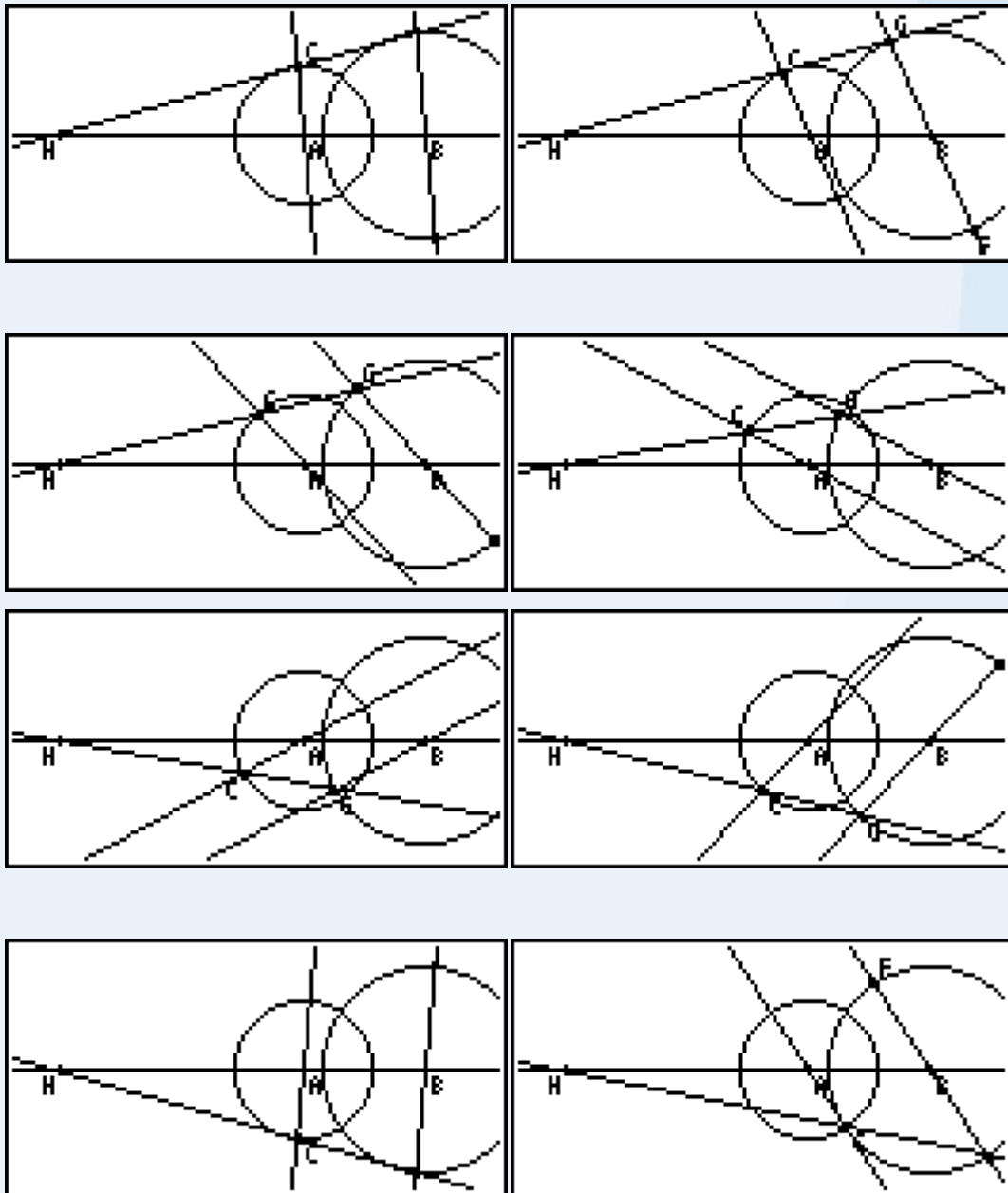
Le point H sort de la figure, on va la déplacer en appuyant sur **F1** (view) et **Défilement** puis on navigue avec les flèches de direction pour voir le point H :

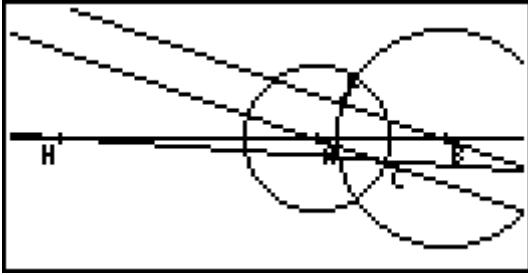




4°) Créer une animation en déplaçant le point C sur le cercle C_1 . Que pouvez-vous conjecturer sur l'emplacement du point H ?

Pour créer l'animation, on sélectionne tout d'abord le cercle C_1 puis le point C (car C va décrire le cercle C_1) puis appuyer sur **[F6]** et **Ajouter anim**, puis pour lancer l'animation, appuyer sur **[F6]** et **Aller (1 fois)**:





On remarque que la position du point H est invariante.

5°) Exprimer H comme barycentre des points A et B , puis démontrer votre conjecture du 4°).

On sait que $B = h(A)$ donc $\overrightarrow{HB} = k\overrightarrow{HA}$ et $G = h(C)$ donc $\overrightarrow{HG} = k\overrightarrow{HC}$ on en déduit par différence que $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HG} = k\overrightarrow{HA} - k\overrightarrow{HC}$ soit $\overrightarrow{GB} = k\overrightarrow{CA}$ donc $k = \frac{GB}{GC} = \frac{R_2}{R_1}$.

L'égalité $\overrightarrow{HB} = k\overrightarrow{HA}$ nous donne $\overrightarrow{HB} = \frac{R_2}{R_1}\overrightarrow{HA}$ donc $R_1\overrightarrow{HB} = R_2\overrightarrow{HA}$ soit $R_2\overrightarrow{HA} - R_1\overrightarrow{HB} = \vec{0}$

H est donc le barycentre du système $\{(A, R_2), (B, -R_1)\}$; Ce point ne dépend donc pas du point C ce qui démontre la conjecture du 4°).