



Variations et convergence des suites du type $u_{n+1} = au_n + b$

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

Déterminer suivant les valeurs de a , b et u_0 les variations et la convergence d'une suite arithmético-géométrique.

eActivité CORRESPONDANTE

ARIGEO.G1e

Exercice n°1 (ARIGEO.g1e):

Soit a et b deux réels. Afin de ne pas travailler avec des suites arithmétiques ou géométriques dont les résultats sont connus, on supposera $a > 0$ et $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

Soit (u_n) la suite définie par : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = au_n + b$, $u_0 \in \mathbb{R}$.

1°) Dans cette question $a = \frac{2}{3}$ et $b = 1$.

- Représenter graphiquement à l'aide de la Graph85 les premières valeurs de la suite (u_n) . On prendra $u_0 = -2$.
- Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?
Reprendre les deux questions précédentes pour les valeurs de u_0 ci-dessous et compléter le tableau :

Valeurs de u_0	Variation	Convergence
$u_0 = -1$		
$u_0 = 0$		
$u_0 = 5$		
$u_0 = 6$		
$u_0 = 7$		

d) Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence et les variations de (u_n) selon les différentes valeurs de u_0 ?

2°) Dans cette question $a = \frac{2}{3}$ et $b = 2$.

a) Compléter le tableau suivant :

Valeurs de u_0	Variation	Convergence
$u_0 = -1$		
$u_0 = 3$		
$u_0 = 8$		
$u_0 = 10$		

b) Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence et les variations de (u_n) selon les différentes valeurs de u_0 ?

3°) Dans cette question $a = \frac{3}{2}$ et $b = 1$.

a) Compléter le tableau suivant :

Valeurs de u_0	Variation	Convergence
$u_0 = -4$		
$u_0 = -2$		
$u_0 = 0$		

b) Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence et les variations de (u_n) selon les différentes valeurs de u_0 ?

4°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

5°) Déterminer le signe de la suite (v_n) en fonction de la valeur de u_0 .


6°) Déterminer les variations de la suite (u_n) en fonction des valeurs de u_0 .

7°) Montrer par récurrence que si $u_0 > \frac{b}{1-a}$ alors $\frac{b}{1-a}$ est un minorant de la suite (u_n) et si $u_0 < \frac{b}{1-a}$ alors $\frac{b}{1-a}$ est un majorant de la suite (u_n)

8°) En déduire la convergence de (u_n) .



1°) a) Représenter graphiquement à l'aide de la Graph85 les premières valeurs de la suite (u_n) . On prendra $u_0 = -2$.

Dans le menu général, choisir  (touche 8).

Il faut sélectionner le bon mode de définition : Ici il s'agit d'une suite définie par récurrence (a_{n+1} en fonction de a_n), il faut appuyer sur **TYPE** (touche **F3**) puis sélectionner le type de suite :

Dans notre cas c'est **F2: $a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$** soit la touche  (touche **F2**)


On entre la suite pour obtenir l'écran suivant :

```
Récurrence
an+1=2+3xan+1  [—]
bn+1:           [—]
cn+1:           [—]
SEL> DEL TYPE n/n SET TABL
```

On va entrer la valeur de a_0 , pour cela il faut appuyer sur **SET** (touche **F5**)

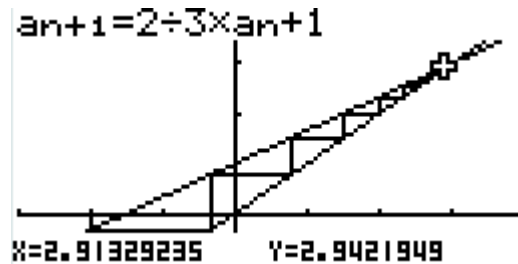
```
Réglage Table  n+1
Start:0
End  :15
a0  :-2
b0  :0
c0  :0
anStr:-2
|a0|a1
```

Il ne faut pas oublier d'entrer la valeur de **anStr**.

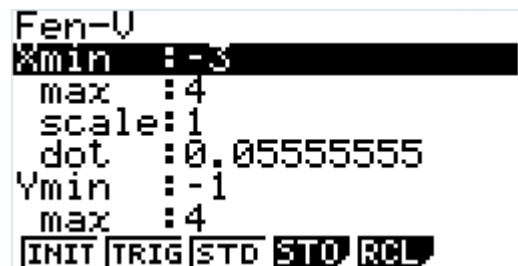
A savoir :  est la première valeur prise dans le calcul des valeurs de la suite dans la table, **anStr** est la première valeur prise dans la représentation graphique des termes de la suite.

On souhaite afficher les valeurs de a_0 jusqu'à a_{15} , ainsi pour **Start** on entre 0, pour **End** 15. **a0** correspond au premier terme de la suite, donc ici -2 .

Puis appuyer sur **EXIT** et **TABLE** (touche **F6**). Puis appuyer sur **VIEW** pour obtenir la représentation graphique souhaitée :



Dans la représentation graphique précédente, on a choisit la fenêtre graphique suivante :



1°) b) Que pouvez-vous conjecturer sur le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

La suite (u_n) semble croissante et converger vers l'abscisse du point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{2}{3}x + 1$, c'est-à-dire 3. On obtient cette valeur en résolvant le système

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{2}{3}x + 1 \end{cases} \text{ on trouve } \begin{cases} y = x \\ \frac{2}{3}x + 1 = x \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} y = x \\ \frac{1}{3}x = 1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$



1°) c) Reprendre les deux questions précédentes pour les valeurs de u_0 ci-dessous et compléter le tableau :

Valeurs de u_0	Représentation graphique	Variation	Convergence
$u_0 = -1$	$a_{n+1} = 2 \div 3 \times a_n + 1$ <p>X=2.765889346 Y=2.843926231</p>	(u_n) semble croissante	(u_n) semble converger vers 3
$u_0 = 0$	$a_{n+1} = 2 \div 3 \times a_n + 1$ <p>X=2.82441701 Y=2.882944673</p>	(u_n) semble croissante	(u_n) semble converger vers 3
$u_0 = 5$	$a_{n+1} = 2 \div 3 \times a_n + 1$ <p>X=3.117055327 Y=3.117055327</p>	(u_n) semble décroissante	(u_n) semble converger vers 3
$u_0 = 6$	$a_{n+1} = 2 \div 3 \times a_n + 1$ <p>X=3.117055327 Y=3.117055327</p>	(u_n) semble décroissante	(u_n) semble converger vers 3
$u_0 = 7$	$a_{n+1} = 2 \div 3 \times a_n + 1$ <p>X=3.104049179 Y=3.104049179</p>	(u_n) semble décroissante	(u_n) semble converger vers 3

1°) d) Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence et les variations de (u_n) selon les différentes valeurs de u_0 ?

D'après l'étude du 1°) c) on peut conjecturer que si $u_0 > 3$ alors la suite (u_n) est décroissante et converge vers 3 et si $u_0 < 3$ alors la suite (u_n) est croissante et converge vers 3. Dans le cas ou $u_0 = 3$ alors la suite sera constante.

2°) a) Dans cette question $a = \frac{2}{3}$ et $b = 2$.

Valeurs de u_0	Représentation graphique	Variation	Convergence
$u_0 = -1$		(u_n) semble croissante	(u_n) semble converger vers 6
$u_0 = 3$		(u_n) semble croissante	(u_n) semble converger vers 6
$u_0 = 8$		(u_n) semble décroissante	(u_n) semble converger vers 6
$u_0 = 10$		(u_n) semble décroissante	(u_n) semble converger vers 6



2°) b) Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence et les variations de (u_n) selon les différentes valeurs de u_0 ?

D'après l'étude précédente on peut conjecturer que si $u_0 > 6$ alors la suite (u_n) est décroissante et converge vers 6 et si $u_0 < 6$ alors la suite (u_n) est croissante et converge vers 6. Dans le cas où $u_0 = 6$ alors la suite sera constante.

3°) a) Dans cette question $a = \frac{3}{2}$ et $b = 1$.

Valeurs de u_0	Représentation graphique	Variation	Convergence
$u_0 = -4$	$a_{n+1} = 3 + 2 \times a_n + 1$ 	(u_n) semble décroissante	(u_n) semble diverger
$u_0 = -2$	$a_{n+1} = 3 + 2 \times a_n + 1$ 	(u_n) semble constante	
$u_0 = 0$	$a_{n+1} = 3 + 2 \times a_n + 1$ 	(u_n) semble croissante	(u_n) semble diverger

3°) b) Que pouvez-vous conjecturer sur la convergence et les variations de (u_n) selon les différentes valeurs de u_0 ?

D'après l'étude précédente on peut conjecturer que si $u_0 > -2$ alors la suite (u_n) est croissante et diverge et si $u_0 < -2$ alors la suite (u_n) est décroissante et diverge. Dans le cas où $u_0 = -2$ alors la suite sera constante.

4°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + b - (au_n + b) = a(u_{n+1} - u_n) = av_n$.

Ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique de raison a .

5°) Déterminer le signe de la suite (v_n) en fonction de la valeur de u_0 .

On sait que la suite (v_n) est géométrique donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = v_0 a^n$. Etant donné que $a > 0$ par hypothèse, alors v_n est du signe de $v_0 = u_1 - u_0 = au_0 + b - u_0 = (a - 1)u_0 + b$.

6°) Déterminer les variations de la suite (u_n) en fonction des valeurs de u_0 .

Si $v_0 > 0$ alors d'après 5°) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n > 0$ soit $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

$$v_0 > 0 \Leftrightarrow u_0(a - 1) > -b$$

On obtient les résultats suivants :

a	u_0	Variation de (u_n)
$a > 1$	$u_0 > \frac{b}{1-a}$	(u_n) est croissante
$a > 1$	$u_0 < \frac{b}{1-a}$	(u_n) est décroissante
$0 < a < 1$	$u_0 > \frac{b}{1-a}$	(u_n) est décroissante
$0 < a < 1$	$u_0 < \frac{b}{1-a}$	(u_n) est croissante

7°) Montrer par récurrence que si $u_0 > \frac{b}{1-a}$ alors $\frac{b}{1-a}$ est un minorant de la suite (u_n) et si $u_0 < \frac{b}{1-a}$ alors $\frac{b}{1-a}$ est un majorant de la suite (u_n)

Montrons que la proposition est vraie au rang 0 : Par hypothèse $u_0 > \frac{b}{1-a}$

Supposons que la proposition soit vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$:

On sait d'après l'hypothèse de récurrence que $u_n > \frac{b}{1-a}$ donc $au_n + b > \frac{ab}{1-a} + b$ (car $a > 0$) d'où

$$au_n + b > \frac{b}{1-a} \text{ ainsi } u_{n+1} > \frac{b}{1-a}.$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n > \frac{b}{1-a}$. Donc $\frac{b}{1-a}$ est un minorant de (u_n) .



On démontre de la même manière que si $u_0 < \frac{b}{1-a}$ alors $\frac{b}{1-a}$ est un majorant de (u_n) .

8°) En déduire la convergence de (u_n) .

a	u_0	Convergence de (u_n)
$a > 1$		Si (u_n) converge alors (v_n) converge vers 0. Or (v_n) est une suite géométrique de raison $a > 1$. Donc elle diverge. Ce qui prouve que (u_n) diverge.
$0 < a < 1$	$u_0 > \frac{b}{1-a}$	On sait d'après 7°) que $\frac{b}{1-a}$ est un minorant de la suite (u_n) . Et d'après 6°) (u_n) est décroissante, donc (u_n) converge.
$0 < a < 1$	$u_0 < \frac{b}{1-a}$	On sait d'après 7°) que $\frac{b}{1-a}$ est un majorant de la suite (u_n) . Et d'après 6°) (u_n) est croissante, donc (u_n) converge.