



Courbes et équations

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

On va déterminer selon les valeurs de m du nombre de solutions de l'équation

$$x^2 - 4x + 3 + me^{-x} = 0 \quad (1)$$

avec $x \in [-6; 0]$

eActivité CORRESPONDANTE

TP16.g1e

Exercice n°1 (TP16.g1e) :

1°) Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction f_m définie sur $[-6; 0]$ par $f_m(x) = x^2 - 4x + 3 + me^{-x}$, pour les valeurs de m suivantes : $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ et 4 .


2°) Pour chacune des valeurs de m précédentes, donner le nombre de solution de l'équation $f_m(x) = 0$ ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

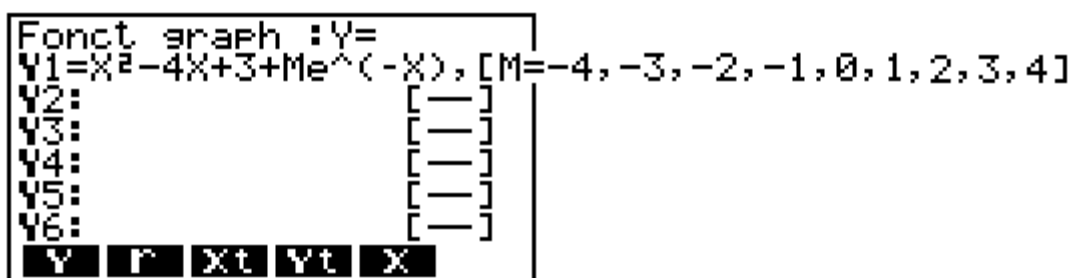
3°) Soit g la fonction définie sur $[-6; 0]$ par $g(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^x$. Représenter graphiquement la fonction g puis conjecturer le nombre de solution de l'équation (1).

4°) Etudier les variations de la fonction g .

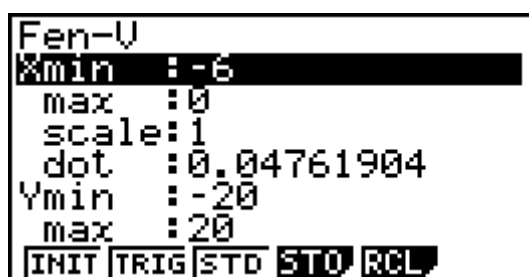
5°) En déduire le nombre de solution de (1). Votre conjecture était-elle correcte ?

1°) Représenter graphiquement la courbe représentative de la fonction f_m définie sur $[-6; 0]$ par $f_m(x) = x^2 - 4x + 3 + me^{-x}$, pour les valeurs de m suivantes : $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ et 4 .

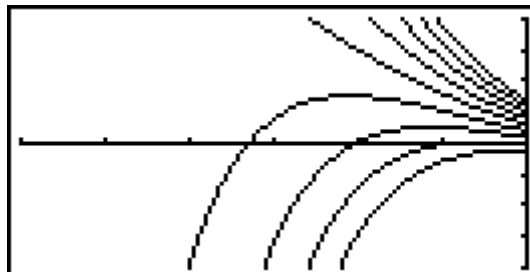
Dans le menu , entrer la fonction ainsi que les valeurs du paramètre comme suit :



On a choisit la fenêtre graphique suivante :



On obtient les représentations graphiques suivantes :

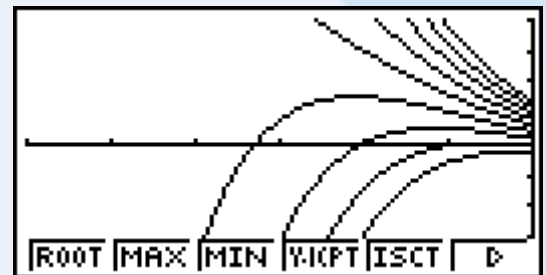




2°) Pour chacune des valeurs de m précédentes, donner le nombre de solution de l'équation $f_m(x) = 0$ ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

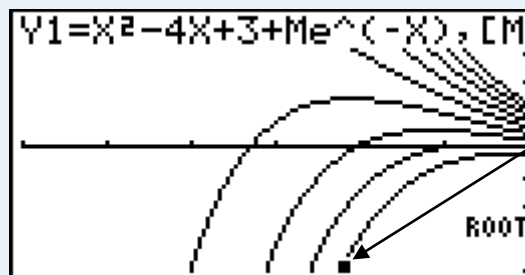
A partir des représentations graphiques, on peut déterminer le nombre de solutions de l'équation $f_m(x) = 0$ ainsi qu'une valeur approchées des solutions

Appuyons sur **[F5]** pour faire apparaitre le menu d'analyse graphique :



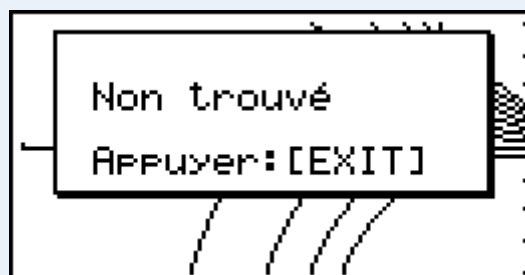
Pour avoir les solutions de l'équation $f_m(x) = 0$ on sélectionne **ROOT** en appuyant sur **[F1]**.

A l'aide des touches **▲** et **▼** on sélectionne la courbe puis on valide en appuyant sur **[EXE]**.

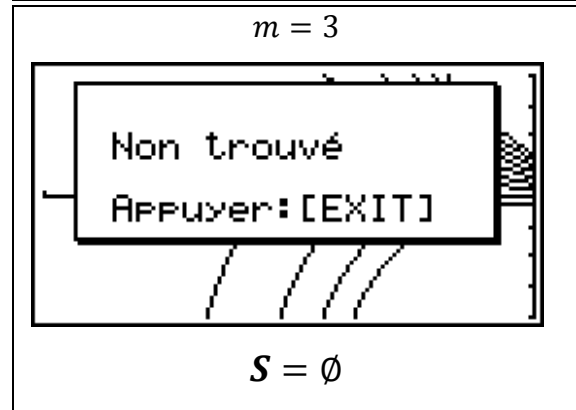
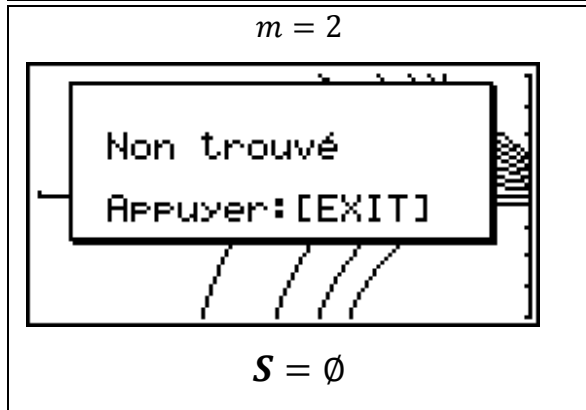
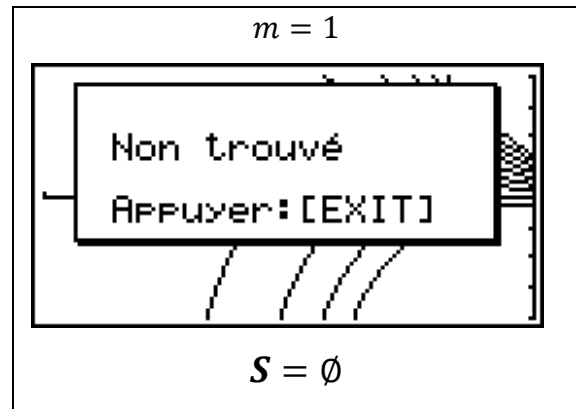
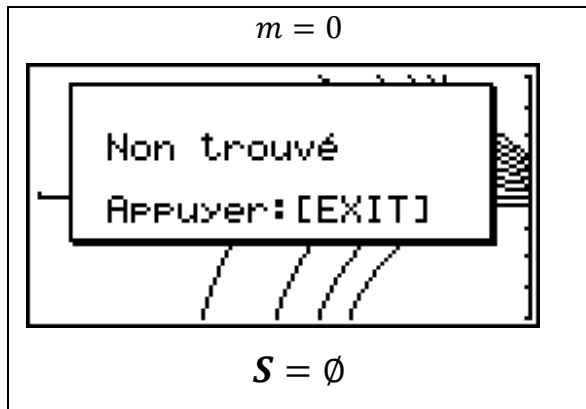
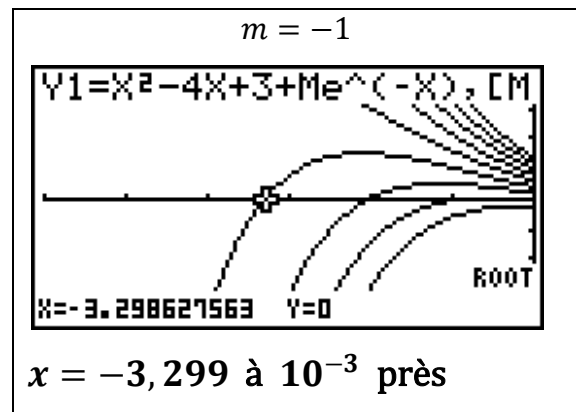
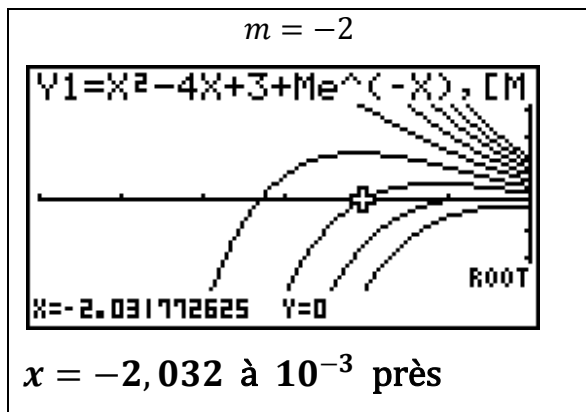
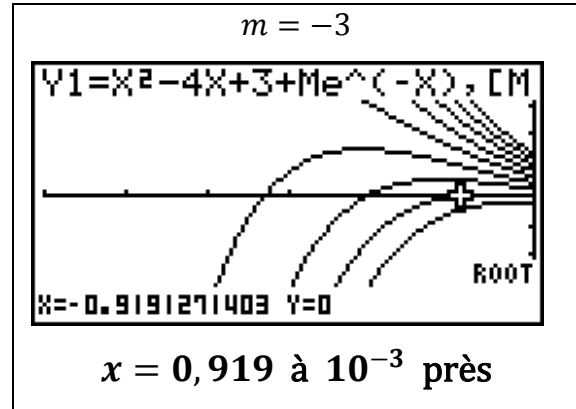
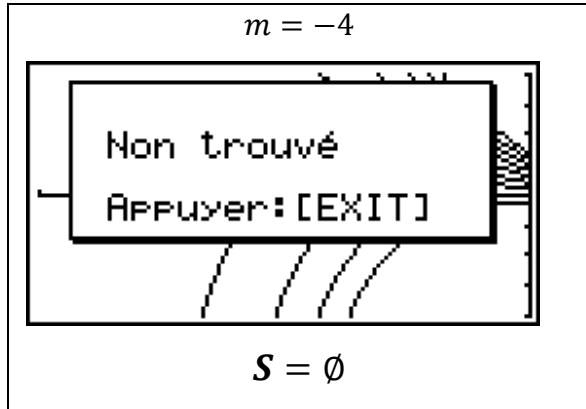


Ce point clignotant indique la courbe sélectionnée.

Lorsque la calculatrice Graph85 ne trouve pas de solution elle affiche :



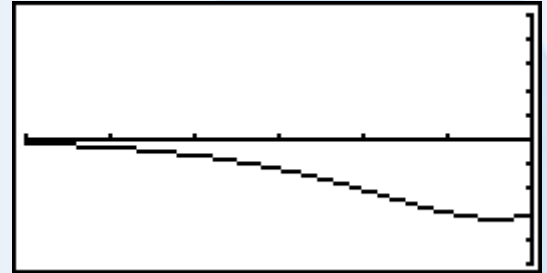
Voici les résultats présentés sous forme de tableau pour chacune des valeurs de m :



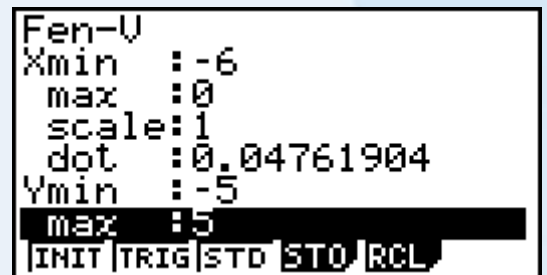


3°) Soit g la fonction définie sur $[-6; 0]$ par $g(x) = (-x^2 + 4x - 3)e^x$. Représenter graphiquement la fonction g puis conjecturer le nombre de solution de l'équation (1).

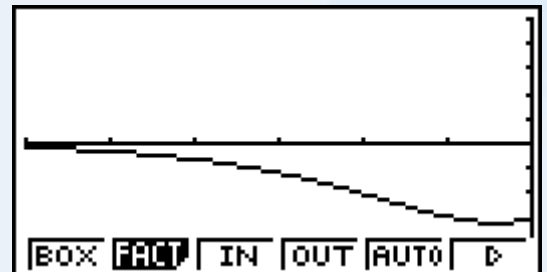
La représentation graphique de g est donnée ci-contre :



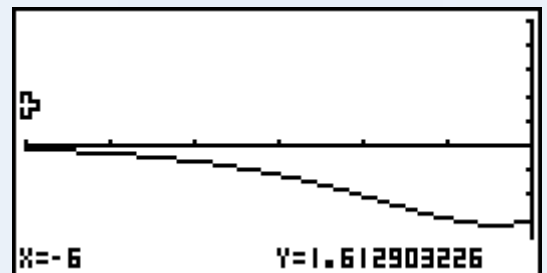
On a utilisé la fenêtre graphique suivante :



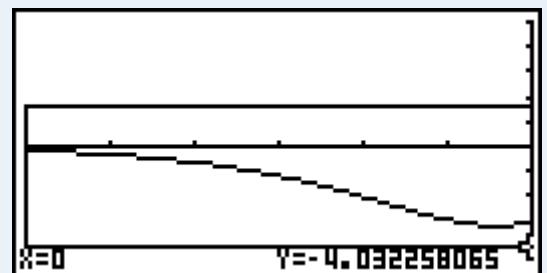
Pour zoomer la partie du graphique qui nous intéresse, on appuie sur **F2** pour faire apparaître le menu zoom, puis on choisit **BOX** (touche **F1**)



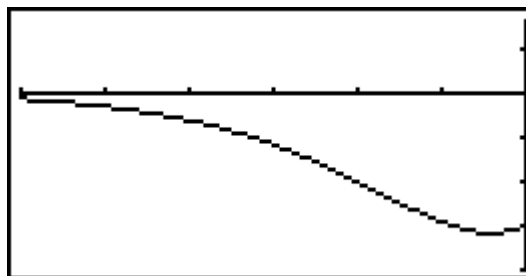
Placer le curseur sur la partie supérieur gauche du rectangle zoom puis appuyer sur **EXE**.



Puis placer le curseur sur la partie inférieur droite du rectangle zoom et appuyer sur **EXE**.



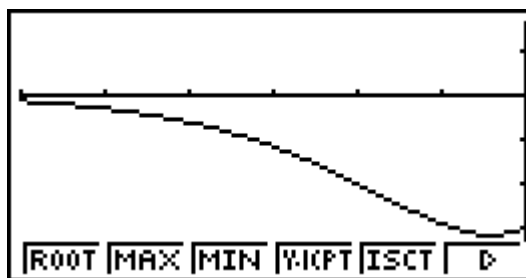
On obtient alors la représentation graphique suivante :



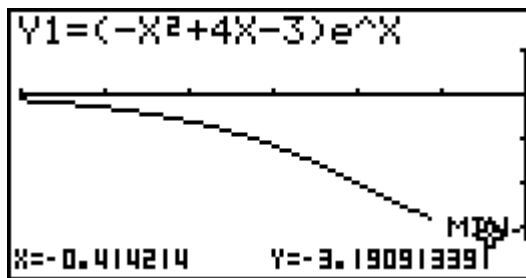
Remarquons tout d'abord que l'équation $x^2 - 4x + 3 + me^{-x} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = me^{-x}$
 $\Leftrightarrow (-x^2 + 4x - 3)e^x = m \Leftrightarrow g(x) = m$

Pour déterminer le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$ il faut connaître les extremums de g sur $[-6; 0]$:

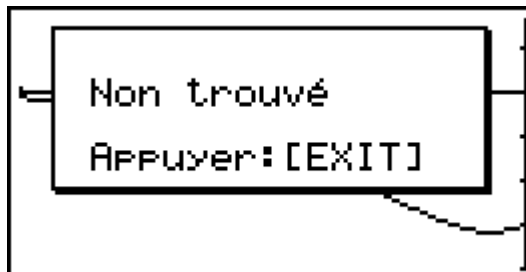
Pour accéder aux outils de l'analyse graphique, il faut appuyer sur **F5**



Le minimum est obtenu grâce à la fonction **MIN**.
 Il est atteint en $x_0 \approx -0,414$ et vaut $g(x_0) \approx -3,191$



Le maximum est obtenu grâce à la fonction **MAX**.
 Ce message d'erreur ne signifie pas qu'il n'y a pas de maximum mais qu'il n'y a pas de valeur de x pour laquelle la dérivée s'annule et qui représente un maximum

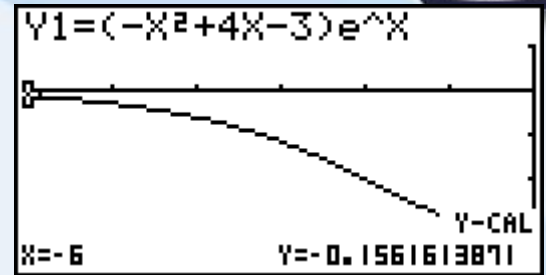


1^{re}/Terminale S

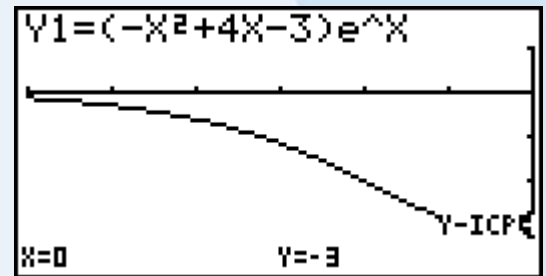
Graph 85/85 SD



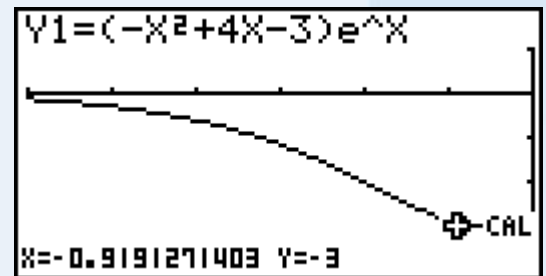
On peut conjecturer que le maximum est $g(-6)$. Pour le calculer on utilise la fonction **Y·CAL**. Le maximum est $g(-6) \approx -0,156$. $g(-6) = -63e^{-6}$



Les coordonnées du point d'intersection avec l'axe des ordonnées sont obtenues avec la fonction **Y·ICPT**. On lit $(0, -3)$



Pour connaître l'abscisse du second point de la courbe d'ordonnée 3 on utilise la fonction **X·CAL**



On peut maintenant conjecturer le nombre de solution de l'équation $g(x) = m$:

m	$-\infty$	$g(x_0)$	-3	$-63e^{-6}$	$+\infty$		
Nbre de solution	0	①	2	②	1	①	0

4°) Etudier les variations de la fonction g .

La fonction $x \mapsto -x^2 + 4x - 3$ est dérivable sur $[-6; 0]$ car c'est une fonction polynome.

La fonction exp est dérivable sur $[-6; 0]$ (cours).

Donc g est le produit de deux fonctions dérivables sur $[-6; 0]$, g est donc dérivable sur $[-6; 0]$:

Pour tout $x \in [-6; 0]$ $g'(x) = (-2x + 4)e^x + (-x^2 + 4x - 3)e^x = (-x^2 + 2x + 1)e^x$

Après un calcul de discriminant on obtient : $g'(x) = -(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})e^x$

x	-6	$1 - \sqrt{2}$	0
signe de g'	-	0	+
g	$-63e^{-6}$	$(-2 - 2\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}$	-3

$$g(-6) = (-(-6)^2 + 4 \times (-6) - 3)e^{-6} = -63e^{-6}$$

$$g(1 - \sqrt{2}) = (-(1 - \sqrt{2})^2 + 4 \times (1 - \sqrt{2}) - 3)e^{-1+\sqrt{2}} = (-2 - 2\sqrt{2})e^{-1+\sqrt{2}}.$$

Remarquons que $1 - \sqrt{2} \approx -0,414$ et $g(1 - \sqrt{2}) \approx -3,191$.

$$g(0) = (-0^2 + 4 \times 0 - 3)e^{-0} = -3$$

5°) Votre conjecture était-elle correcte ?

Le tableau de variation précédent confirme et démontre notre conjecture du 3°)