Autour de la fonction ln (Partie I).

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

Il s'agit dans ce TP de se servir des fonctionnalités du tableur de la Graph85 afin de découvrir, à partir de la définition de cette fonction par primitive, une approximation de sa courbe représentative par la méthode d'Euler, à un niveau terminale S, là où l'élève ne connaît pas encore cette fonction, mais peut sans grande difficulté, la découvrir.

E-Activité CORRESPONDANTE

TP18.g1e

Exercice (TP18.g1e):

Voici la fonction L, définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, et telle que :

$$L'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad L(1) = 0$$

Le but de cet exercice est d'étudier cette nouvelle fonction L, et d'en effectuer une approximation de sa représentation graphique, à l'aide de la méthode d'Euler.

1°) À l'aide du mode S-SHT, appliquer la méthode d'Euler à la fonction L sur l'intervalle $[1;+\infty[$ (on affichera 31 valeurs $(x_i;y_i)$ de ce nuage ($(x_0 = 1; y_0 = 0)$ etc…), dans deux colonnes du tableur, le pas dans une cellule à part afin de pouvoir le faire varier plus facilement.)

2°) Pourquoi ne peut-on pas utiliser cette méthode sur l'intervalle $]0;1]$?

3°) Montrer que la fonction L est strictement croissante sur $]0; +\infty[$. Puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

4°) Utiliser le tableur de la calculatrice pour obtenir la feuille de calcul ci-contre (on pourra commencer par les cellules A52 à A102).
Puis entrer dans la colonne B les valeurs de la fonction L obtenues par la méthode d'Euler.

	A	B	C	D
1	Xi	Yi	PAS=	0,001
2	=1/A53			
3	=1/A54			
4	⋮			
50	⋮			
51	=1/A102			
52	1			
53	=A52+D$1			
54	=A53+D$1			
55	=A54+D$1			
56	⋮			
101	⋮			
102	=A101+D$1			

5°) Pour chacune des trois valeurs de h suivantes : 0,005 ; 0,01 et 0,1, afficher les différentes approximations de la courbe représentative de la fonction L.

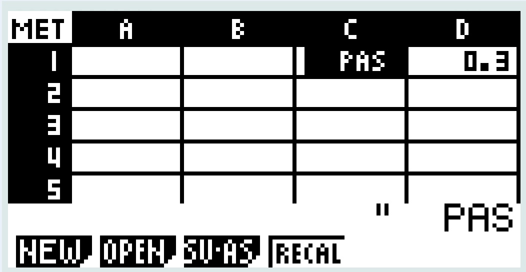
6°) Ajouter à l'éditeur graphique l'équation de la courbe associée à la fonction logarithme népérien, dont voici la touche sur calculatrice : $\boxed{\text{ln}}$. Que semble t-il légitime d'en conclure ?

1°) À l'aide du mode S-SHT, appliquer la méthode d'Euler à la fonction L sur l'intervalle $[1; +\infty[$

On commence par entrer dans le mode S-SHT.

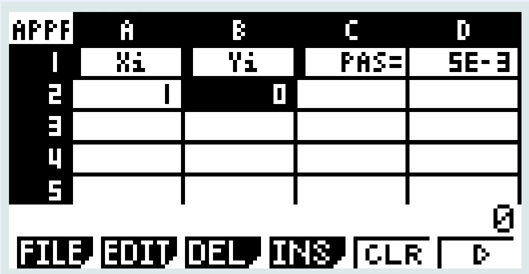
On entre alors le pas d'itération de la méthode, afin de pouvoir commencer la méthode d'Euler.

Voici ce que l'on obtient :



Remarque : Tout texte dans une cellule, doit commencer par des guillemets : "
Par contre il n'est pas nécessaire de les fermer.

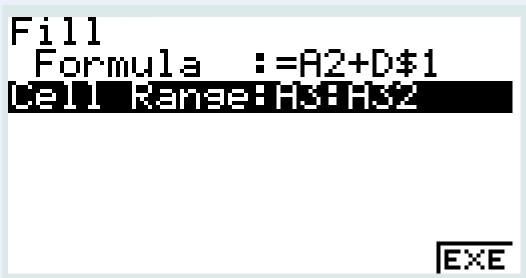
On complète en suivant la méthode d'Euler :



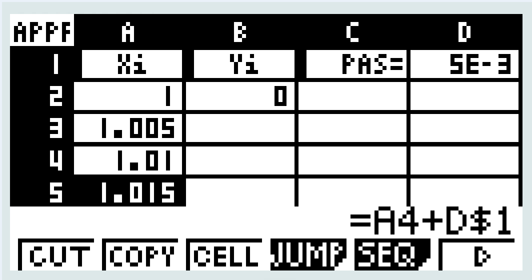
Pour les valeurs de la suite (x_i) :

On sait que $x_{i+1} = x_i + h$, ainsi pour compléter la colonne A on va utiliser la commande FILL :

Dans le menu EDIT, sélectionner FILL, puis compléter comme suit :



Le symbole “$” est nécessaire, afin de toujours faire référence au pas de la cellule D1. On obtient :



APPF	A	B	C	D
1	Xi	Yi	PAS=	5E-3
2	1	0		
3	1.005			
4	1.01			
5	1.015			

=A4+D$1

CUT COPY CELL JUMP SEQ ▷

Pour les valeurs de la suite (y_i) :

On construit donc la liste (y_i) des approximations de $L(x_i)$, obtenues par la méthode d’Euler, avec pour commencer $x_i \geq 1$

On rappelle que la méthode d’Euler est basée sur le développement limité à l’ordre 1 de L :

$$L(x_{i+1}) = L(x_i) + h.L'(x_i) + h.\varepsilon(h), \text{avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

Ainsi on utilise l’approximation suivante pour $L(x_{i+1})$ (car h est petit) :

$$L(x_i) + h.L'(x_i)$$

De plus on sait que $L'(x_i) = \frac{1}{x_i}$ et $L(1) = 0$.

La suite (y_i) sera donc définie par :

$$y_0 = L(x_0) = L(1) = 0 \text{ et pour tout } i \geq 1, y_{i+1} = y_i + \frac{h}{x_i}.$$

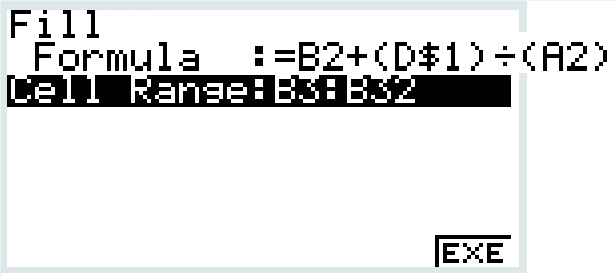
On peut maintenant compléter la colonne B :

Dans la cellule B2, on y entre : 0, car $y_0 = 0$

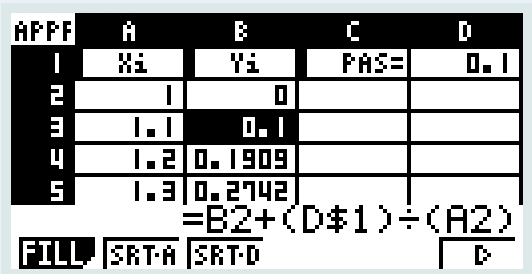
Dans la cellule B3, on entre la formule suivante :

=B2+(D$1)/(A2)

Puis pour les cellules suivantes, il suffit de faire un « copier-coller », en utilisant la commande FILL on obtient :



Et donc finalement,



2°) Pourquoi ne peut-on pas utiliser cette méthode sur l'intervalle $]0;1]$?

Sur l'intervalle]0; 1[, les valeurs doivent justement rester strictement supérieures à 0. Or, la suite $(1 - nh)_{n \geq 1}$ est strictement décroissante et non minorée, donc, suivant le nombre de valeurs calculées et la valeur de h, on va sortir de l'ensemble de définition de la fonction L pour n assez grand. On va procéder différemment.

3°) Montrer que la fonction L est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$.

La fonction L est définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$, avec :

$$L'(x) = \frac{1}{x}$$

Dont pour tout $x \in]0;+\infty[$ $L'(x) > 0$, la fonction L est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

Pour cette seconde propriété, on procède de la même façon, en dérivant la fonction composée :

$$f : x \longmapsto L\left(\frac{1}{x}\right)$$

Cette fonction f est la composée de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$, ainsi :

$$\text{Pour tout } x \in]0;+\infty[\quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\frac{1}{x}} = -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

Ce qui nous donne : Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = -L'(x)$.

On en déduit donc qu'il existe une constante réelle C, telle que :

$$\text{Pour tout } x \in]0;+\infty[\quad f(x) = -L(x) + C$$

Et, du fait que $L(1) = 0$, alors $f(1) = L\left(\frac{1}{1}\right) = 0$, et par conséquent : $C = 0$.

Conclusion : Pour tout $x \in]0;+\infty[$ $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$

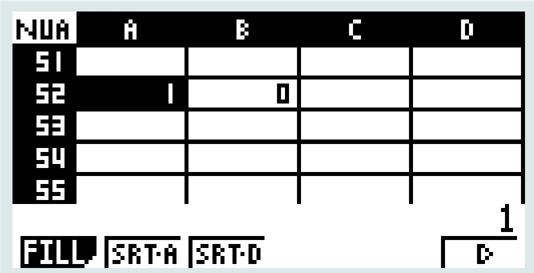
<u>Intérêt de cette propriété :</u>

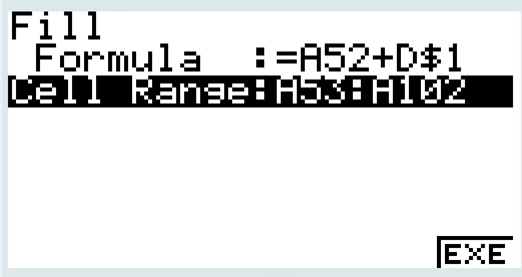
Puisque l'on est capable de connaître des approximations des images de réels supérieurs ou égaux à 1, par la fonction L, grâce à la méthode d'Euler, et que tout réel de l'intervalle $]0;1[$ est l'image d'un réel supérieur ou égal à 1, par la fonction inverse, alors, grâce à la propriété précédemment démontrée, on en déduit que pour calculer l'approximation de l'image d'une valeur de $]0;1[$ par cette fonction L, il suffira de prendre l'opposé de l'approximation de son inverse, déjà calculée.
Voyons ce qui se passe à l'écran, ça se passe même de commentaires :

4°) Utiliser le tableur de la calculatrice pour obtenir la feuille de calcul ci-contre (on pourra commencer par les cellules A52 à A102).
Puis entrer dans la colonne B les valeurs de la fonction *L* obtenues par la méthode d'Euler.

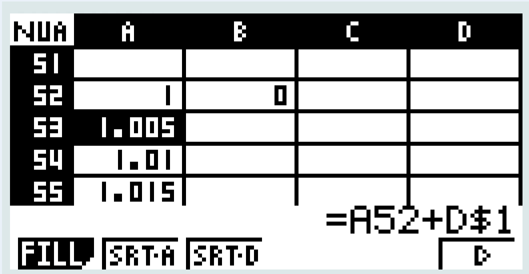
	A	B	C	D
1	Xi	Yi	PAS=	0,001
2	=1/A53			
3	=1/A54			
4	•			
50	•			
51	=1/A102			
52	1			
53	=A52+D$1			
54	=A53+D$1			
55	=A54+D$1			
56	•			
101	•			
102	=A101+D$1			

On commence par compléter les cellules A52 et B52 puis on utilise la commande FILL :

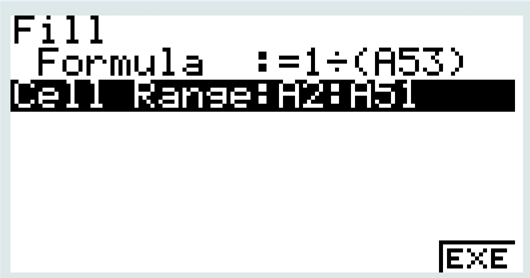


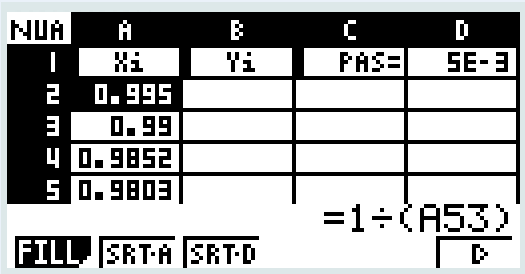


On obtient l'écran suivant (pour un pas h=0,005) :



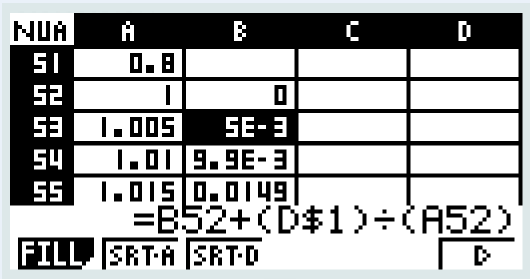
Pour les cellules A2 à A51 on obtient :



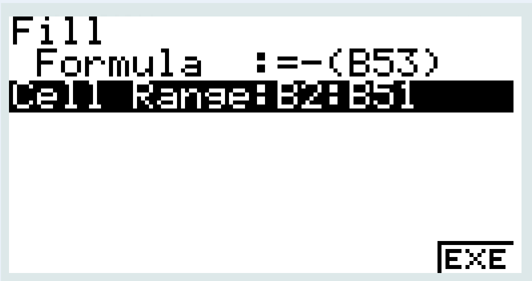


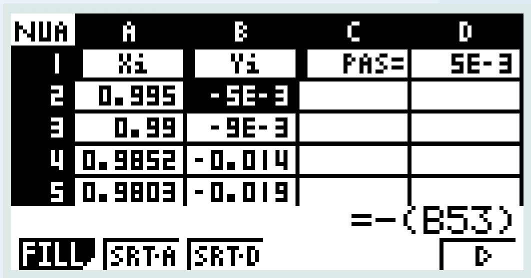
Remarque : Ce n'est pas gênant que ces valeurs ne soient pas rangées dans l'ordre croissant, car l'essentiel étant d'effectuer une représentation graphique du nuage de points de coordonnées (x_i, y_i).

On peut donc compléter, comme dans la question 1°), les valeurs B52 à B53 en réappliquant la méthode d'Euler. On obtient ainsi l'écran suivant :



Reste alors à compléter les valeurs de B2 à B51… Et pour cela, on utilise la propriété démontrée dans la question précédente. On calcule les opposées de ces valeurs, ce qui donne :



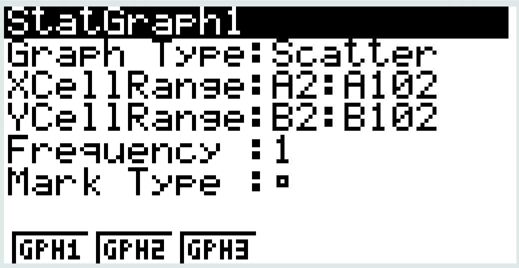


Remarque : La fonction inverse réalise une bijection entre les deux intervalles $]1; +\infty[$ et $]0; 1[$.
Ainsi quel que soit la valeur du pas, on obtiendra toujours une liste de valeurs dans l'intervalle $]0; +\infty[$, qui comportera autant de valeurs inférieures que supérieures à 1. Ce qui permet d'obtenir la représentation graphique de la fonction L sur $]0; +\infty[$.

5°) Pour chacune des trois valeurs de *h* suivantes : 0,005 ; 0,01 et 0,1, afficher les différentes approximations de la courbe représentative de la fonction *L*.

Pour obtenir le nuage de points associés aux deux colonnes de valeurs, A et B de notre tableur, on appuie sur à la racine du menu sur FILE EDIT DEL INS CLR ▷ GRPH SET

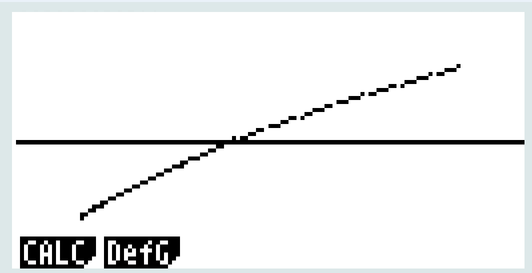
On complète l'écran suivant :



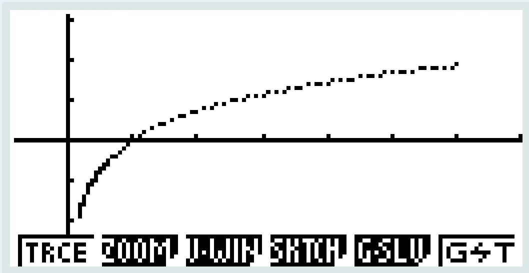
La touche F1 permet ensuite d'obtenir les représentations graphiques suivantes :

1- Avec le pas 5.10^{-3}

2°) Avec le pas 0,01



3°) Avec le pas 0,1

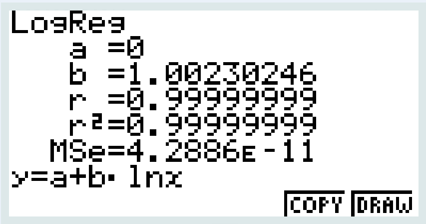


Remarque :

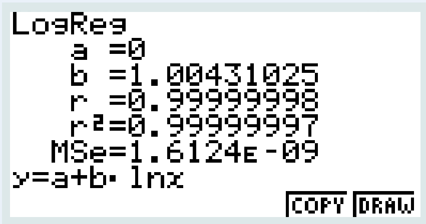
Bien évidemment, plus la valeur du pas est élevée, moins l'approximation est bonne.

Pour obtenir l'allure de la courbe de la fonction L, le pas de 0,1, reste tout à fait acceptable. Pour s'en convaincre, il suffit d'utiliser les outils de calcul de régression pour constater justement que le seul ajustement qui convienne ici est l'ajustement logarithmique et les résultats qu'ils fournissent permettent véritablement de se convaincre que l'allure obtenue est représentative de ce qu'on obtient en réalité. Voici pour les trois valeurs précédentes du pas ce que la calculatrice fournit comme résultats :

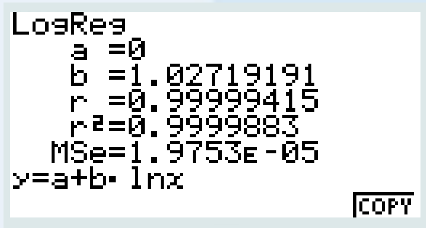
Pour le pas de 5.10^{-3}



Pour le pas de 0,01

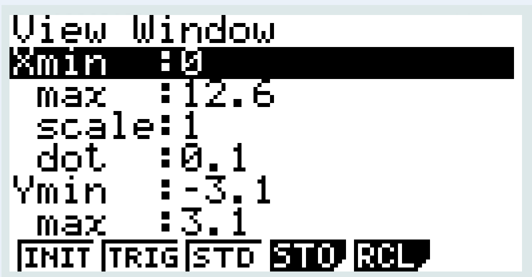


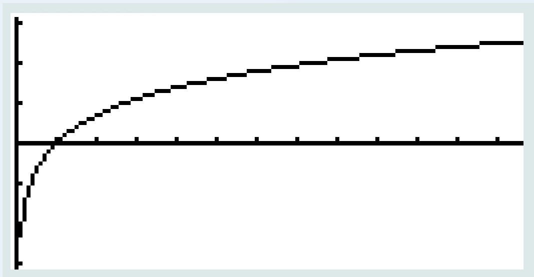
Pour le pas de 0,1



6°) Ajouter à l'éditeur graphique l'équation de la courbe associée à la fonction logarithme népérien, dont voici la touche sur calculatrice : ln. Que semble t-il légitime d'en conclure ?

Voici ce que l'on obtient, qui coïncide bien avec les représentations graphiques précédentes :





On désignera désormais par fonction *logarithme népérien*, que l'on notera ln, la fonction L.