



Propriétés algébriques de la fonction Logarithme Népérien.

NIVEAU

Terminale S.

OBJECTIFS

Il s'agit dans ce TP de se servir des fonctionnalités du tableur de la Graph85 afin de découvrir des propriétés algébriques de la fonction \ln , juste après avoir vu en cours sa définition et sa courbe représentative.

E-Activité CORRESPONDANTE


TP19.g1e

Exercice (TP19.g1e):

Voici la fonction logarithme népérien, notée \ln , définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, et telle que :

$$\text{Pour tout } x \in]0; +\infty[\quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$$

Le but de cet exercice est de conjecturer et démontrer des propriétés algébriques de cette fonction.

1°) Dans le mode  de la calculatrice, expliquer comment générer aléatoirement un nombre compris (strictement) entre 0 et 20. Puis faire en sorte, que son affichage n'excède pas deux chiffres après la virgule.

2°) A l'aide du tableur de la calculatrice :

- Afficher dans une colonne une liste de 10 réels compris entre 0 et 20, affichant au plus deux chiffres après la virgule.
- Établir alors une conjecture entre $\ln x$ et $\ln(x^3)$ puis entre $\ln x$ et $\ln(x^n)$, avec $n \in \mathbb{Z}$.



3°) Pour n entier relatif fixé, pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$f_n(x) = \ln(x^n) - n \ln x$$

Montrer que cette fonction f_n est constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Qu'en déduit-on ?

4°) Pour a et b deux réels strictement positifs, sur le même modèle de mise en œuvre que celui de la question 2°), établir une conjecture entre les trois nombres $\ln a$, $\ln b$ et $\ln(a \times b)$, en formant pour a et b des listes de réels compris entre 0 et 10, affichant au plus deux chiffres après la virgule.


5°) Pour a un réel strictement positif fixé, pour tout réel x strictement positif, on pose :


$$d_a(x) = \ln(ax) - \ln x - \ln a. \text{ Montrer que cette fonction est constante sur l'intervalle }]0; +\infty[.$$

Qu'en déduit-on ?

6°) De la même manière, conjecturer, puis démontrer, une propriété entre le logarithme d'un quotient de réels strictement positifs, et le logarithme de ces réels.



1°) Dans le mode  de la calculatrice, expliquer comment générer aléatoirement un nombre compris (strictement) entre 0 et 20. Puis faire en sorte, que son affichage n'excède pas deux chiffres après la virgule.


On utilise le mode , pour cette génération de nombres aléatoires, compris entre 0 et 20.

Pour obtenir un nombre aléatoire, on utilise la fonction **Ran#** accessible en appuyant sur les touches


  **PROB** **Ran#**.

Cette fonction génère un nombre décimal entre 0 et 1. Or, si $0 < x < 1$ alors $0 < 20x < 20$.

On obtient par exemple :


```
Ran#           0.276295303
20Ran#         5.079963978
20Ran#         13.7274112

```

Il ne reste plus qu'à arrondir ces nombres au second chiffre après la virgule. Afin d'exploiter seulement 2 chiffre après la virgule, on va utiliser la fonction **RndFix**.


```
RndFix(20Ran# ,2)
17.43
19.04
19.26
17.92
3.89
9.15

```



2°) a) A l'aide du tableur de la calculatrice, afficher dans une colonne une liste de 10 réels compris entre 0 et 20, affichant au plus deux chiffres après la virgule.


Ouvrir le tableur en appuyant sur . Sauvegarder le fichier afin de ne pas le perdre ; pour cela appuyer sur les touches **FILE** (touche **F1**) puis **SUITE** (touche **F3**) et entrer le nom de la feuille de calcul.

On va entrer la formule précédente pour les cellules A2 à A11 :

Appuyer sur **EDIT**  **FILL** puis compléter la boîte de dialogue comme suit, puis valider en appuyant sur **EXE** :

Voici ce que l'on obtient alors :

PI	A	B	C	D
1	A	ln A		
2	15.39			
3	9.82			
4	4.38			
5	15.94			
	=RndFix(20Ran#,2)			
FILL	SRT-A	SRT-D		D

Remarque : À tout moment, si l'on souhaite faire recalculer ces valeurs par la calculatrice dans le but de modifier la liste, il suffit de revenir à la racine du mode , et d'appuyer sur **F1**. Des fonctions vous y seront proposées, et parmi elles, vous y trouverez la commande **RECAL** (touche **F4**).

On va maintenant compléter les images de ces valeurs par la fonction ln, grâce à la touche **ln** de la calculatrice.



Voici ce que l'on obtient :

PI	A	B	C	D
1	A	ln A		
2	11.66	2.4561		
3	7.01	1.9473		
4	19.81	2.9861		
5	14.97	2.706		
			=ln A2	
	FILE	SRT-A	SRT-D	D

2°) b) Établir alors une conjecture entre $\ln x$ et $\ln(x^3)$ puis entre $\ln x$ et $\ln(x^n)$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

On souhaite établir une propriété entre $\ln A$ et $\ln(A^3)$.

On va entrer la valeur de l'exposant (ici 3) dans la cellule C1 : On obtient l'écran suivant :

PI	A	B	C	D
1		EXP=	3	
2	A	ln A		
3	11.57	2.4484		
4	7.09	1.9586		
5	17.33	2.8524		
	FILE	EDIT	DEL	INS
			CLR	D

On peut alors y inscrire en colonne C les différentes valeurs de $\ln(A^3)$:

PI	A	B	C	D
1		n=	3	
2	A	ln A	ln A^n	
3	15.28	2.7265	8.1796	
4	19.61	2.976	8.9281	
5	11.58	2.4492	7.3478	
			=ln ((A3)^(C#1))	
	FILE	SRT-A	SRT-D	D

En observant les résultats, on remarque que $\ln A^3 = 3 \ln A$.

On peut le vérifier en refaisant les calculs à l'aide de la fonction RECAL :



Ci-dessous on a pris $n = -4$ puis on a calculer $\frac{\ln A^{-4}}{\ln A}$

PI	A	B	C	D
1		$n =$	-4	
2	A	$\ln A$	$\ln A^n$	$C \div B$
3	12.48	2.5241	-10.09	-4
4	10.61	2.3617	-9.447	-4
5	10.1	2.3129	-9.29	-4

$= C3 \div B3$

FILE EDIT DEL INS CLR D

Il semble que pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\ln a^n = n \ln a$$

3°) Pour n entier relatif fixé, pour tout réel x strictement positif, on pose :

$$f_n(x) = \ln(x^n) - n \ln x$$

Montrer que cette fonction f_n est constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Qu'en déduit-on ?

Soit un réel x dans l'intervalle $]0; +\infty[$. La fonction f_n est dérivable sur cet intervalle, avec :

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \times \frac{1}{x^n} - n \times \frac{1}{x} = \frac{nx^{n-1}}{x^n} - \frac{n}{x} = \frac{n}{x} - \frac{n}{x} = 0$$

On peut donc en déduire que la fonction f_n est constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Et puisque l'on sait que $\ln 1 = 0$, on obtient alors la valeur de cette constante : 0.

Conclusion : Pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$:

$$\ln(x^n) = n \ln x$$



4°) Pour a et b deux réels strictement positifs, sur le même modèle de mise en œuvre que celui de la question 2°, établir une conjecture entre les trois nombres $\ln a$, $\ln b$ et $\ln(a \times b)$, en formant pour a et b des listes de réels compris entre 0 et 20, affichant au plus deux chiffres après la virgule.

On procède exactement comme à la question 2°, sauf que cette fois on formera deux listes de nombres sur les deux colonnes A et B, puis dans les colonnes qui suivront, on y calculera, leurs produit, le logarithme du résultat, et leurs logarithmes, et on y cherchera une relation. Voici ce que l'on peut obtenir :

P2	A	B	C	D
1	Ai	Bi	Ai×Bi	ln A×B
2	8.59	6.41	55.061	4.0084
3	4.08	3.06	12.484	2.5245
4	1.59	15.1	24.009	3.1784
5	18.22	4.11	74.884	4.3159
			=ln C2	
FILE EDIT DEL INS CLR ▾				

P2	D	E	F	G
1	ln A×B	ln Ai	ln Bi	E+F
2	4.0084	2.1505	1.8578	4.0084
3	2.5245	1.406	1.1184	2.5245
4	3.1784	0.4637	2.7146	3.1784
5	4.3159	2.9025	1.4134	4.3159
			=E2+F2	
FILE EDIT DEL INS CLR ▾				

On peut conjecturer que

$$\ln(A_i \times B_i) = \ln A_i + \ln B_i$$

5°) Pour a un réel strictement positif fixé, pour tout réel x strictement positif, on pose :

$d_a(x) = \ln(ax) - \ln x - \ln a$. Montrer que cette fonction est constante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Qu'en déduit-on ?

Le réel strictement positif a est fixé. Sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction d_a est dérivable et pour x , réel strictement positif, on a :

$$d'_a(x) = \frac{a}{ax} - \frac{1}{x} = 0$$

d_a est une fonction constante égale à $d_a(1) = 0$ sur $]0; +\infty[$, ainsi pour tous réels strictement positifs a et x : $\ln(ax) = \ln a + \ln x$.



6°) De la même manière, conjecturer, puis démontrer, une propriété entre le logarithme d'un quotient de réels strictement positifs, et le logarithme de ces réels.

Pour cette dernière propriété algébrique, on se sert du fichier précédent, en y ajoutant le quotient des deux nombres. Voici ce que l'on peut observer :

P3	C	D	E	F
1	$X_i \div Y_i$	$\ln X \div Y$	$\ln X_i$	$\ln Y_i$
2	2.8697	1.0542	1.7065	0.6523
3	0.3643	-1.009	1.6272	2.6369
4	0.1522	-1.882	0.4252	2.3075
5	0.7085	-0.344	2.423	2.7675

$= \ln C2$

FILE EDIT DEL INS CLR D

On remarque à l'aide du tableur que l'on a :

$$\ln\left(\frac{x_i}{y_i}\right) = \ln x_i - \ln y_i$$

Démonstration : On sait que pour x et y positifs stricts $\ln\left(\frac{x}{y}\right) + \ln y = \ln\left(\frac{x}{y} \times y\right) = \ln x$.

Ce qui prouve que pour tout réels positifs stricts x et y on a

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$