



Similitudes

NIVEAU

Terminale S, enseignement de spécialité.

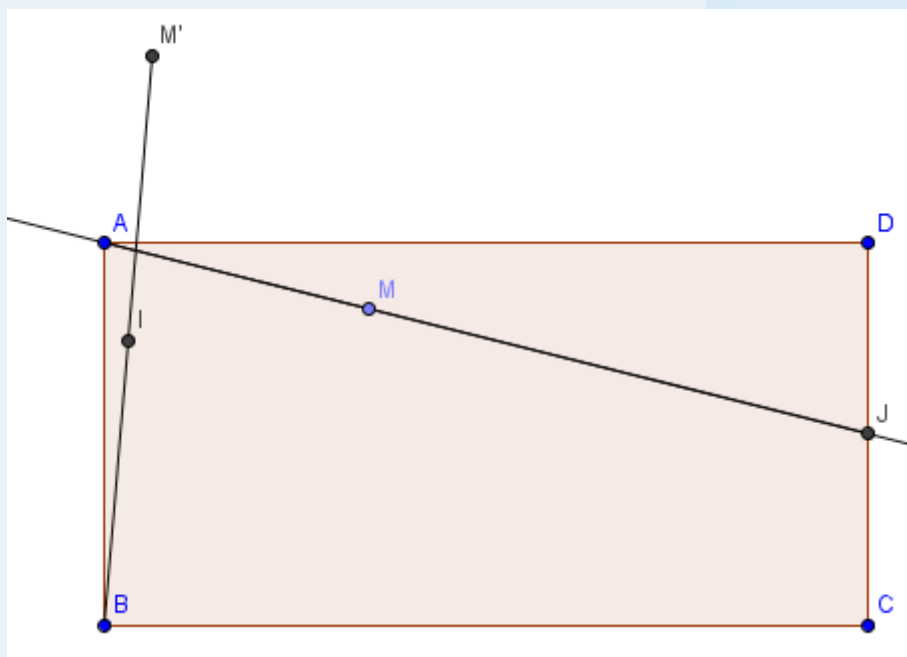
OBJECTIFS

Soit $ABCD$ un rectangle de largeur 2 et de hauteur 1. Soit d la médiane du triangle ACD issue de A .

Soit f la similitude de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $M \in d$ et $M' = f(M)$.

On va chercher à déterminer l'ensemble de points décrit par le milieu de $[BM']$ lorsque M décrit la droite d .

On utilisera le module de géométrie de la Graph85 pour résoudre cet exercice et conjecturer les solutions.



Exercice n°1 :

1°) Construction de la figure

a) Construire le rectangle ABCD tel que $AD = 2$ et $AB = 1$

b) Soit J le milieu du segment $[DC]$. Construire le point J , puis créer un point M sur le segment $[AJ]$.

c) En utilisant une homothétie puis une rotation, construire le point M' image de M par la similitude de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

d) Construire I le milieu du segment $[BM']$.

2°) A l'aide d'une animation visualiser l'ensemble des points décrit par I lorsque M décrit la droite (AJ) . Conjecturer alors la nature de cet ensemble ainsi que ses éléments caractéristiques.

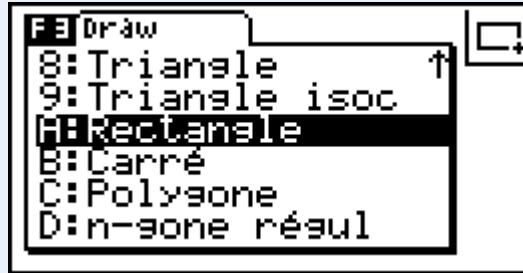
3°) A l'aide des théorèmes sur les similitudes, démontrer votre conjecture.



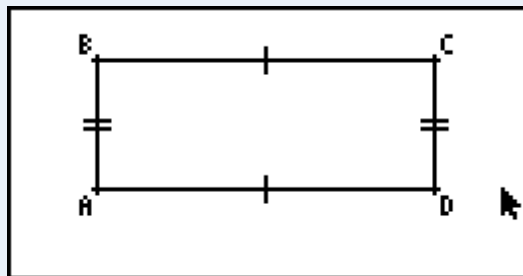
1°) a) Construire le rectangle ABCD tel que $AD = 2$ et $AB = 1$

On va tout d'abord dans le menu géométrie 


Appuyer sur **F3** puis sélectionner **A:Rectangle** dans le menu :

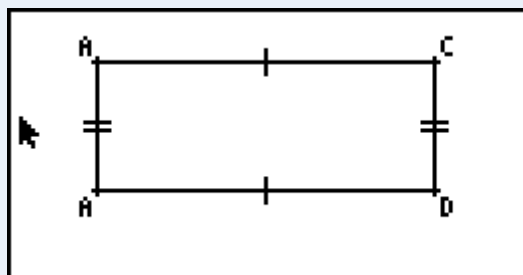


Tracer le rectangle comme l'indique l'énoncé :

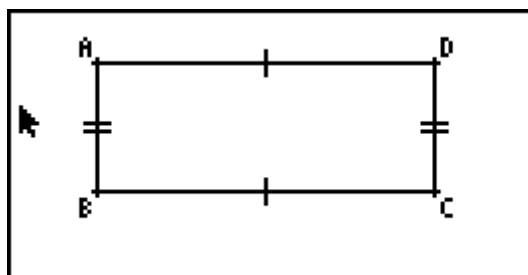


On va renommer le point B en A : sélectionner le point B puis appuyer sur **VAR**  **EXE**  **EXE**.

Puis sur  **A** **EXE**. Enfin appuyer sur **EXIT** pour retourner en mode plein écran. On obtient l'écran suivant :

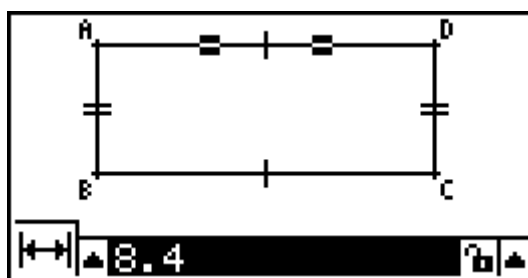


Renommer de la même façon les autres points pour obtenir la figure de l'énoncé.

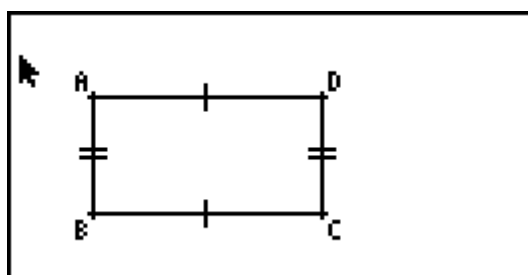


On va imposer les contraintes suivantes : $AD = 2$ puis $AB = 1$:

Pour cela sélectionner le segment $[AD]$ puis cliquer sur **VAR** .



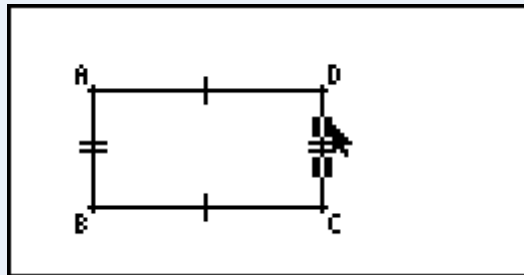
Et entrer 2 pour valeur, puis procéder de même avec le segment $[AB]$ et entrer la valeur 1 :



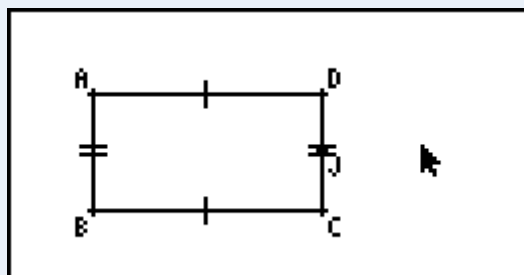


1°) b) Soit J le milieu du segment $[DC]$. Construire le point J , puis créer un point M sur le segment $[AJ]$.

Sélectionner le segment $[CD]$ en plaçant votre curseur dessus et appuyer sur **[EXE]**.

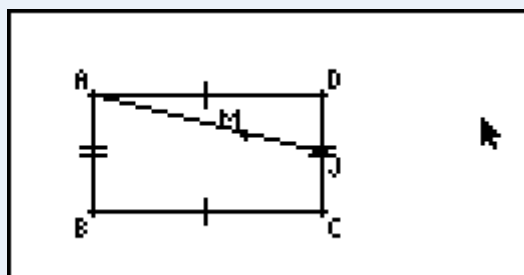


Puis appuyer sur **[F4] 3:Point milieu [EXE]**. Renommer enfin le point qui vient d'être créé en J :



Pour tracer le segment $[AJ]$, appuyez sur **[F3] 2:Segment ligne** puis sélectionner les points A et J .

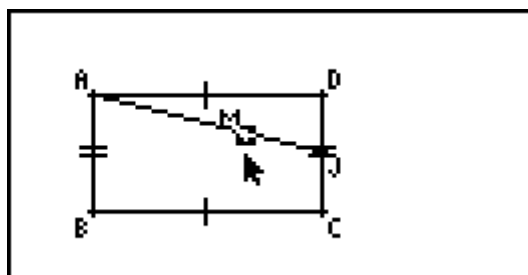
Pour créer un point sur le segment $[AJ]$, cliquez sur **[F3] 1:Point** puis sélectionner un point du segment $[AJ]$. Enfin renommer ce point en M .



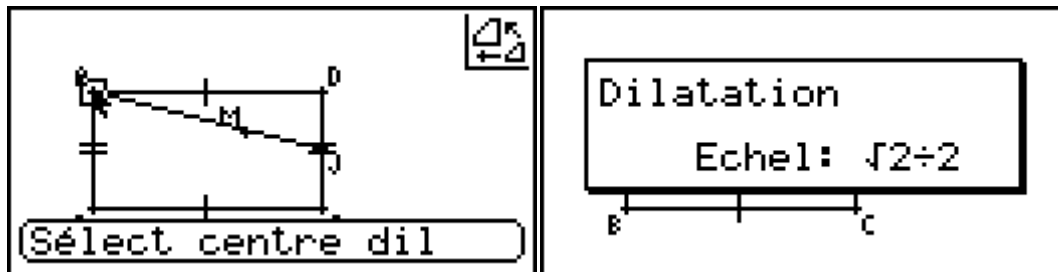
1°) c) En utilisant une homothétie puis une rotation, construire le point M' image de M par la similitude de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Construisons tout d'abord l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Sélectionner le point M



Puis cliquer sur **F5** 5: Dilatation (homothétie), sélectionner le centre puis entrer le rapport



On obtient la figure suivante :

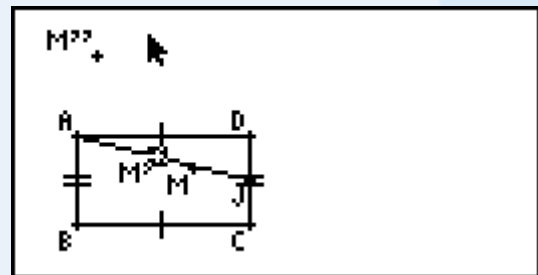
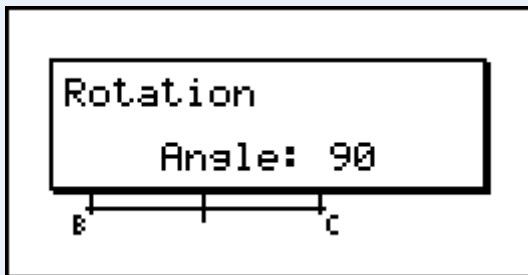
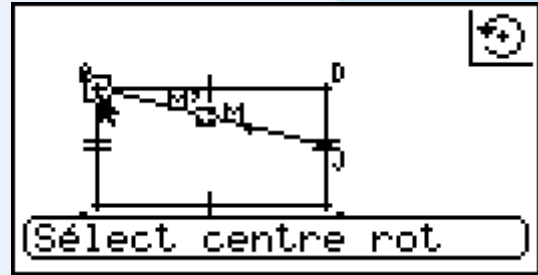
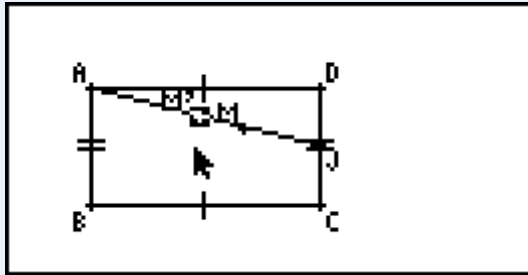


1^{re}/Terminale S

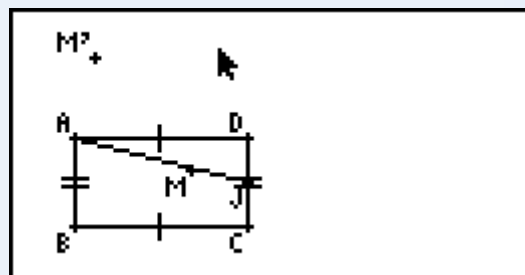
Graph 85/85 SD



Puis construire l'image de M' par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ en sélectionnant M' puis appuyer sur **F5 4:Rotation** et entrer l'angle (attention ici l'unité paramétrée dans la calculatrice pour les mesures d'angles était le degré).

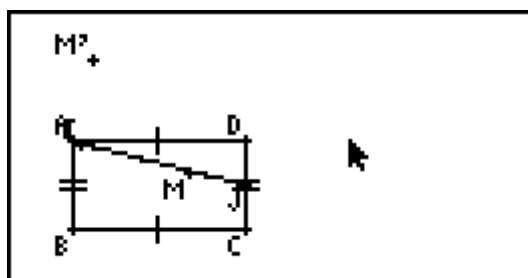


On va masquer le point M' pour cela sélectionnez-le puis appuyez sur **OPTN** et **Masquer**.
Puis renommer le point M'' en M'



1°) d) Construire I le milieu du segment $[BM']$.

Sélectionner les points M' et B puis cliquer sur **F4 3:Point milieu EXE**. Renommer ce point en I .



2°) A l'aide d'une animation visualiser l'ensemble des points décrit par I lorsque M décrit la droite (AJ) . Conjecturer alors la nature de cet ensemble ainsi que ses éléments caractéristiques.

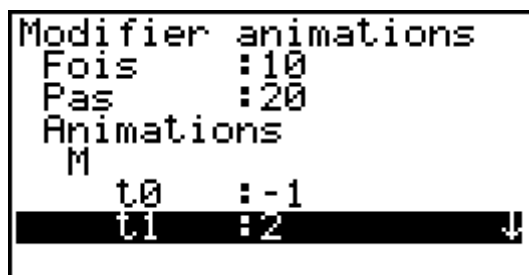
Pour créer l'animation, on sélectionne tout d'abord le segment $[AJ]$ puis le point M puis appuyer sur **F6 Ajouter anim.**

Il n'est pas possible de demander à la calculatrice de faire une animation avec $M \in (AJ)$. Une droite étant infinie, elle n'a ni commencement ni fin, ce qui n'est pas pratique pour faire une animation.

Mais on peut contourner cette difficulté en imposant dans un premier temps $M \in [AJ]$, puis de changer les paramètres de l'animation : $t_0 = 0$ correspond à $M = J$ et $t_1 = 1$ correspond à $M = A$.

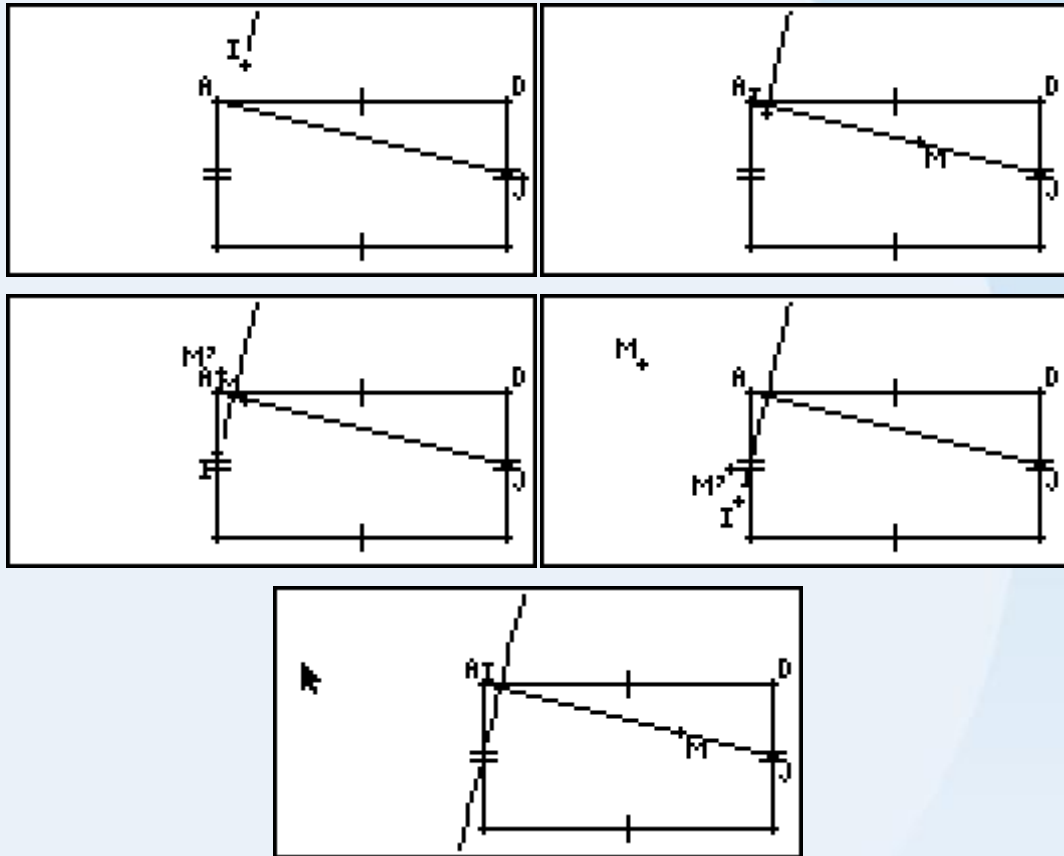
Ainsi en élargissant l'intervalle des valeurs du paramètre de l'animation on peut permettre au point M de décrire des points de la droite (AJ) n'appartenant pas au segment $[AJ]$:

Cliquer sur **F6 Editer anim** et modifier les paramètres comme suit :





Puis pour lancer l'animation, appuyer sur **[F6] Aller (1 fois)**:



On peut donc conjecturer que l'ensemble des points recherché est la perpendiculaire à (AJ) passant par le milieu du segment $[AB]$.

3°) A l'aide des théorème sur les similitudes, démontrer votre conjecture.

Soit s la similitude de centre A de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

Par construction $I = (h \circ s)(M)$.

L'image de la droite (AJ) par s est une droite perpendiculaire à (AJ) car l'angle de la similitude est $\frac{\pi}{2}$.

De plus $s(A) = A$ donc $s((AJ))$ est la perpendiculaire à (AJ) passant par A . Notons Δ cette droite.

L'image de Δ par h est un droite qui lui est parallèle. Soit K le milieu de $[AB]$. On a $s(A) = A$ et $h(A) = K$, ainsi $h(\Delta) = \Delta'$, avec Δ' la parallèle à Δ passant par K , c'est-à-dire la perpendiculaire à (AJ) passant par K .