Suites associées

Énoncé

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ b_0 = 60 \end{cases} \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$$

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice, calculer les 50 premiers termes des suites (a_n) et (b_n).
2. Peut-on penser que ces suites sont convergentes et quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de la suite (a_n) et à celle de la suite (b_n) ?

> Appeler l'examinateur pour vérifier les calculs et les conjectures.

3. Soient (u_n) et (v_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = a_n + b_n \text{ et } v_n = b_n - a_n.$$

   (a) Compléter la feuille de calcul avec les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

   (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature de chacune de ces suites ?

> Appeler l'examinateur pour valider la conjecture et lui indiquer comment mettre en place la vérification demandée à la question suivante.

   (c) Vérifier expérimentalement, sur la feuille de calcul, la conjecture émise, validée par l'examinateur.

> Appeler l'examinateur, lui montrer les vérifications faites et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

4. (a) Démontrer la conjecture de la question 3(b).

   (b) Déterminer les expressions de a_n et b_n en fonction de n.

   (c) Justifier les réponses données à la question 2 et déterminer la valeur exacte de la limite des suites (a_n) et (b_n).

Production demandée

– Construction de la feuille de calcul complète ;

– Formulation orale des conjectures ;

– Réponses argumentées à la question 4.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. On entre dans l'application Tableur. On crée une nouvelle feuille de travail (« `Fich/Nouveau` »).

   Dans la cellule `A1`, on place la valeur 20. Dans `B1` on place la valeur 60.

   On place ensuite le curseur sur la cellule `A2`. On choisit la fonction « `Edit/Remplir échelle` » et on renseigne la fenêtre comme indiqué fig1.

   Ainsi on met la formule `=(2A1+B1)/4` dans la cellule `A2` et on copie cette formule de la cellule `A2` jusqu'à la cellule `A50`. Comme il s'agit d'*adressage relatif*, cela signifie qu'en fait, on place la formule `=(2A[k-1]+B[k-1])/4` dans la cellule `A[k]`, pour $2 \leqslant k \leqslant 50$.

   Puisqu'on n'a pas encore défini le contenu des cellules `B2` à `B50`, tout se passe comme si elles contenaient 0. Cela explique les valeurs obtenues dans la colonne `A` (fig2).

   On se place maintenant sur la cellule `B2` et (toujours avec « `Edit/Remplir échelle` »), on copie la formule `=(A1+2B1)/4` de la cellule `B2` jusqu'à la cellule `B50`. On obtient alors les cinquante premiers termes de la suite (b_n), et du même coup les "vrais" cinquante premiers termes de la suite (a_n) dans la colonne `A` (fig3).

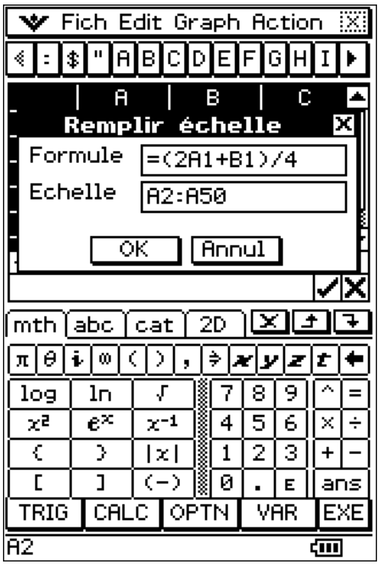


fig1 : définition des a_n

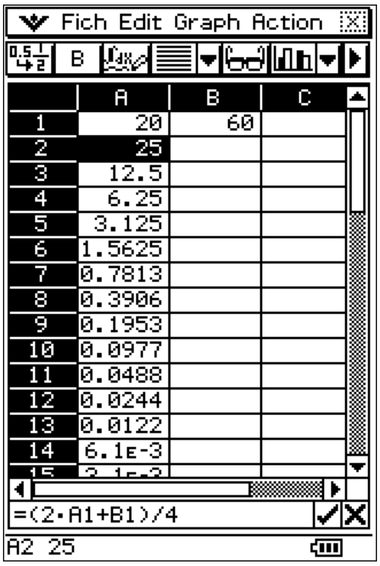


fig2 : résultat provisoire !

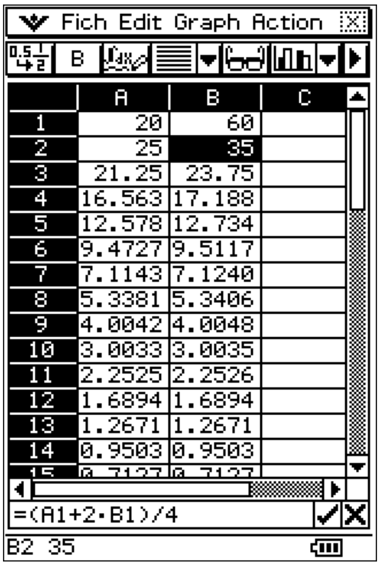


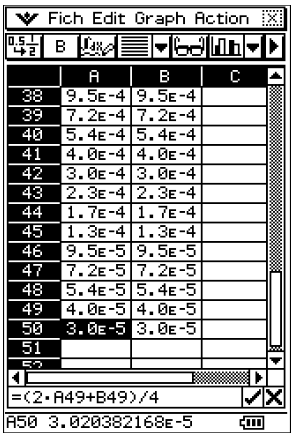
fig3 : la table des valeurs

2. Si on déplace le curseur vers le bas du tableau, on observe les dernières valeurs de notre échantillon des suites (a_n) et (b_n) (fig4). Il semble bien que ces deux suites soient décroissantes et qu'elle convergent vers la valeur 0.

   On voit également que les valeurs a_n et b_n sont rapidement très proches l'une de l'autre (et identiques à 10^{-4} près dès $n = 12$ comme on le voit fig3).

   On peut afficher un peu plus de décimales en élargissant les colonnes `A` et `B`.

   Pour cela on sélectionne ces colonnes (faire glisser le stylet sur les entêtes `A` et `B`) et on choisit « `Edit/Largeur de colonne` ». On peut par exemple fixer à 60 la largeur des deux premières colonnes (fig5).



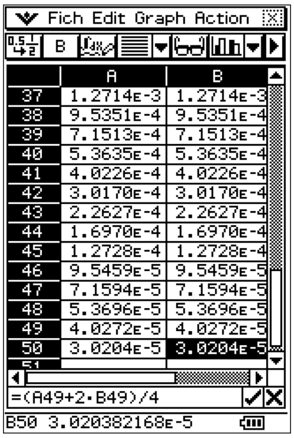
Fich Edit Graph Action

	A	B	C
38	9.5E-4	9.5E-4	
39	7.2E-4	7.2E-4	
40	5.4E-4	5.4E-4	
41	4.0E-4	4.0E-4	
42	3.0E-4	3.0E-4	
43	2.3E-4	2.3E-4	
44	1.7E-4	1.7E-4	
45	1.3E-4	1.3E-4	
46	9.5E-5	9.5E-5	
47	7.2E-5	7.2E-5	
48	5.4E-5	5.4E-5	
49	4.0E-5	4.0E-5	
50	3.0E-5	3.0E-5	
51			

=(2·A49+B49)/4

A50 3.020382168E-5

fig4 : valeurs finales



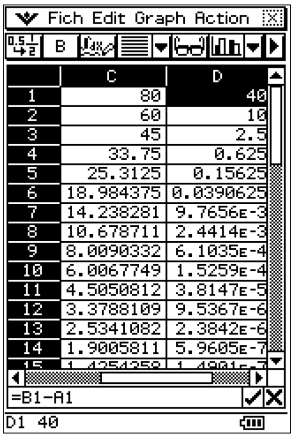
Fich Edit Graph Action

	A	B
37	1.2714E-3	1.2714E-3
38	9.5351E-4	9.5351E-4
39	7.1513E-4	7.1513E-4
40	5.3635E-4	5.3635E-4
41	4.0226E-4	4.0226E-4
42	3.0170E-4	3.0170E-4
43	2.2627E-4	2.2627E-4
44	1.6970E-4	1.6970E-4
45	1.2728E-4	1.2728E-4
46	9.5459E-5	9.5459E-5
47	7.1594E-5	7.1594E-5
48	5.3696E-5	5.3696E-5
49	4.0272E-5	4.0272E-5
50	3.0204E-5	3.0204E-5

=(A49+2·B49)/4

B50 3.020382168E-5

fig5 : + de décimales



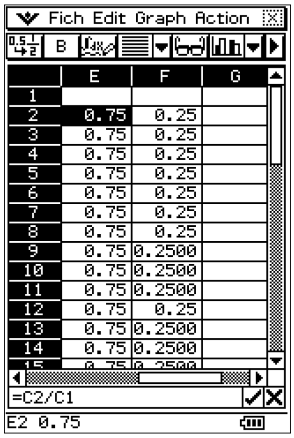
Fich Edit Graph Action

	C	D
1	80	40
2	60	10
3	45	2.5
4	33.75	0.625
5	25.3125	0.15625
6	18.984375	0.0390625
7	14.238281	9.7656E-3
8	10.678711	2.4414E-3
9	8.0090332	6.1035E-4
10	6.0067749	1.5259E-4
11	4.5050812	3.8147E-5
12	3.3788109	9.5367E-6
13	2.5341082	2.3842E-6
14	1.9005811	5.9605E-7

=B1-A1

D1 40

fig6 : les u_n et v_n



Fich Edit Graph Action

	E	F	G
1			
2	0.75	0.25	
3	0.75	0.25	
4	0.75	0.25	
5	0.75	0.25	
6	0.75	0.25	
7	0.75	0.25	
8	0.75	0.25	
9	0.75	0.2500	
10	0.75	0.2500	
11	0.75	0.2500	
12	0.75	0.25	
13	0.75	0.2500	
14	0.75	0.2500	

=C2/C1

E2 0.75

fig7 : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

3. (a) On va calculer les 25 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) dans `C` et `D`.

   Pour cela, on se place sur la colonne `C1` et avec la fonction « `Edit/Remplir échelle` », on copie la formule `=A1+B1` de la cellule `C1` jusqu'à la cellule `C25`. De la même manière, on copie la formule `=B1-A1` de la cellule `D1` jusqu'à la cellule `D25`.

   On voit le résultat fig6 (on a fixé la largeur des colonnes `C` et `D` à 60).

   (b) Il semble bien que la suite (u_n) soit géométrique de raison 3/4 et que la suite (v_n) soit géométrique de raison 1/4.

   (c) Pour s'en assurer (du moins *expérimentalement*), on va calculer les quotients u_{n+1}/u_n dans la colonne `E` et les quotients v_{n+1}/v_n dans la colonne `F`.

   Pour cela, on se place sur la cellule `E2` et avec la fonction « `Edit/Remplir échelle` », on copie la formule `=C2/C1` dans la zone rectangulaire qui va de la cellule `E2` jusqu'à la cellule `F25`. Du fait de l'adressage relatif, ce sont bien les quotients `D[k+1]/D[k]` qui sont placés dans les cellules `F[k]`.

   Le résultat (fig7) est éloquent : les suites (u_n) et (v_n) sont donc (certainement) géométriques de raisons respectives 3/4 et 1/4.

4. (a) Par somme et différence, les relations $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases}$ deviennent $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{4} \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{4} \end{cases}$

   Ainsi les suites (u_n) et (v_n) sont-elles (officiellement cette fois) géométriques de raisons respectives 3/4 et 1/4.

   (b) Les relations $\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = b_n - a_n \end{cases}$ s'écrivent aussi $\begin{cases} a_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \\ b_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

   (c) La raison q de chacune des suites (u_n) et (v_n) vérifiant $|q| < 1$, on a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$

   Les relations obtenues en (4b) donnent alors $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{cases}$

5. *Un autre point de vue avec le Classpad*

L'application Tableur du Classpad convient parfaitement à la résolution de cet exercice, mais l'environnement Suites offre un autre de point sur les suites (a_n) et (b_n).

On ouvre donc l'application Suites depuis l'écran du Classpad. On sélectionne si besoin est l'onglet `Récurrence`, puis « `Edit/Tout effacer` » pour faire place nette.

On entre les définitions récursives des suites (a_n) et (b_n), et leurs valeurs initiales, comme indiqué fig8 (utiliser le menu « `n,a`$_n$ » pour faciliter la saisie).

Avec l'icône, on définit ensuite les limites de la table des valeurs (fig9).

Il suffit de toucher l'icône pour générer cette table de valeurs (fig10). Ici on a maximisé la fenêtre de la table par un appui sur `Resize`. D'autre part pour fixer le nombre de colonnes à afficher, il faut aller dans « `/Format Graphique/Spécial` » et régler le champ « `Modèle largeur cellule` ».

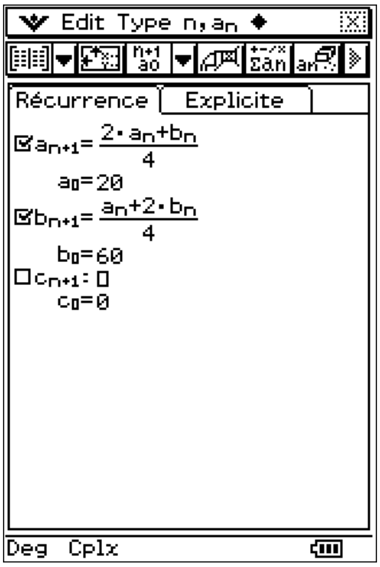


fig8 : définition des suites

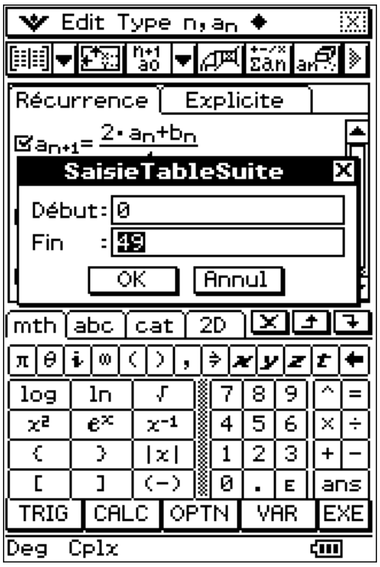


fig9 : préparation de la table

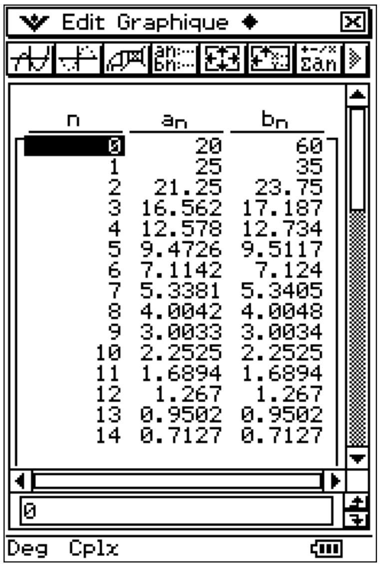


fig10 : les premières valeurs

Revenons à l'écran de l'application Suites.

Un appui sur l'icône ouvre, dans le demi-écran inférieur, un espace pour effectuer des calculs sur les suites étudiées, notamment grâce à la fonction `rSolve`.

Dans cet espace, on entre l'expression :

`rSolve({a`$_{n+1}$`=(2a`$_n$`+b`$_n$`)/4, b`$_{n+1}$`=(a`$_n$`+2b`$_n$`)/4}, {a`$_0$`=20, b`$_0$`=60})`

Remarque : utiliser le stylet pour "glisser-déposer" les expressions $\dfrac{2a_n + b_n}{4}$ et $\dfrac{a_n + 2b_n}{4}$ d'une fenêtre à l'autre, c'est beaucoup plus pratique !

Le résultat est immédiat (fig11). On obtient donc l'expression *exacte* de a_n et de b_n.

$$a_n = 40\Big(\frac{3}{4}\Big)^n - 20\Big(\frac{1}{4}\Big)^n \qquad \text{et} \qquad b_n = 40\Big(\frac{3}{4}\Big)^n + 20\Big(\frac{1}{4}\Big)^n$$

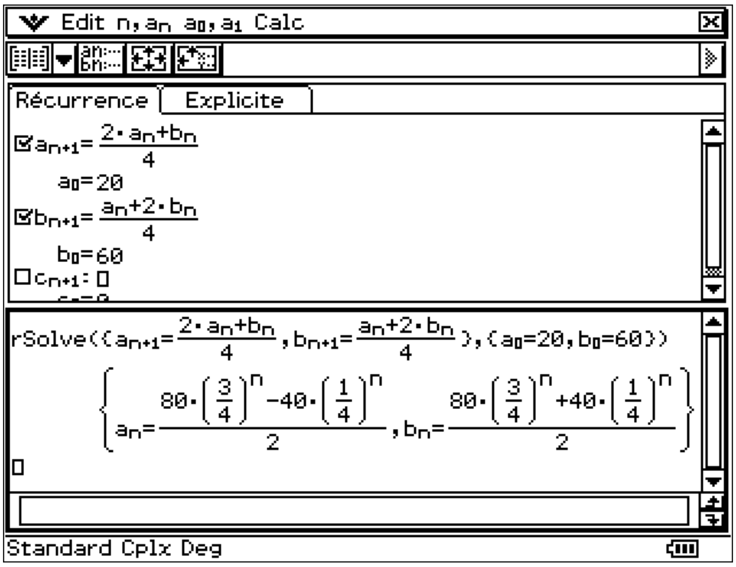


fig11 : expression de a_n et b_n quand $a_0 = 20$ et $b_0 = 60$.

On peut même faire “plus fort” en demandant l'expression générale de a_n et de b_n en fonction de leur terme initial (fig12 : on a posé ici $a_0 = a$ et $b_0 = b$).
Impressionnant, non ?

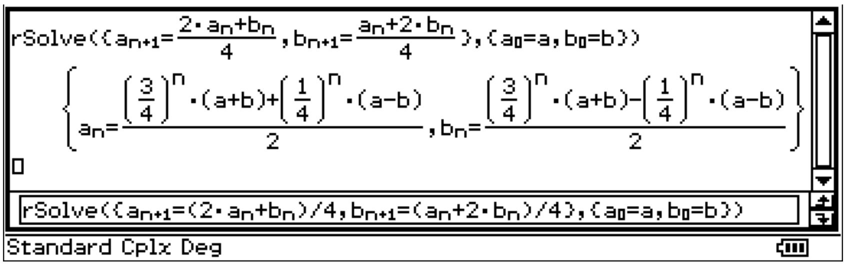


fig12 : expression de a_n et b_n quand $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

Bien sûr, les suites (a_n) et (b_n) tendent vers 0 indépendamment de a_0 et b_0. En généralisant un peu l'exercice (mais en utilisant toujours les suites auxiliaires u_n et v_n) on trouve $u_n = u_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ et $v_n = v_0\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$, avec $\begin{cases} u_0 = a_0 + b_0 \\ v_0 = b_0 - a_0 \end{cases}$ et on conclut avec $\begin{cases} a_n = (u_n - v_n)/2 \\ b_n = (u_n + v_n)/2 \end{cases}$

Remarque : il y a un moyen très simple de prouver directement (sans passer par les suites auxiliaires (u_n) et (v_n)) que a_n et b_n tendent toujours vers 0.
En effet, en posant $w_n = \max(|a_n|, |b_n|)$, on trouve, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{4} \\[2ex] b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|a_n| + |b_n|}{4} \leqslant \dfrac{3}{4}w_n \\[2ex] |b_{n+1}| \leqslant \dfrac{|a_n| + 2|b_n|}{4} \leqslant \dfrac{3}{4}w_n \end{cases} \Rightarrow w_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}w_n$$

Par une récurrence évidente, on trouve $0 \leqslant w_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n w_0$ pour tout n.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ donc $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \end{cases}$ (et on n'est pas passé par les suites (u_n) et (v_n)).