

Étude de flux de populations

Énoncé

L'objet de ce travail est l'étude de flux de populations entre trois zones géographiques : une ville notée A, une zone périphérique notée B et une zone de campagne notée C.

Pour modéliser les flux de population, on fait les hypothèses suivantes :

- La population totale des trois zones **reste constante**.
- Chaque année la zone A perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone B et 1% de la population de la zone C.
- Chaque année la zone B perd 10% de sa population, mais accueille 10% de la population de la zone A et 1% de la population de la zone C.
- Chaque année la zone C perd 2% de sa population.

Au premier janvier 2008, la zone A comptait 5 000 habitants, la zone B en comptait 2 000 et la zone C en comptait 4 000.

On désigne par a_n , b_n et c_n les nombres d'habitants respectifs des zones A, B et C au premier janvier de l'année 2008 + n . On admettra, pour l'étude mathématique, que les nombres réels a_n , b_n et c_n peuvent ne pas être entiers.

1. On souhaite décrire, avec le modèle ci-dessus, l'évolution des trois populations.
 - (a) Représenter graphiquement, à l'aide du tableur, ou d'une calculatrice, les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .
 - (b) Conjecturer le sens de variation et la convergence des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

Appeler l'examineur pour vérification des résultats obtenus et des conjectures.

2. Pour chaque année 2008 + n , soit d_n la différence de population entre les zones A et B. Conjecturer la nature de la suite (d_n) .

Appeler l'examineur pour une vérification et lui indiquer les méthodes envisagées pour les démonstrations qui suivent.
--

3. On se propose de calculer les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .
 - (a) Déterminer l'expression de c_n et de d_n en fonction de n .
 - (b) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n .
 - (c) Déterminer les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

Production demandée

- Une feuille de calcul donnant les valeurs de n et des termes des différentes suites.
- Un graphique représentant les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .
- Les réponses argumentées aux questions de la Partie 3.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. D'une année sur l'autre, 90% des habitants de la ville A y restent, et ils sont rejoints par 10% des habitants de la zone B et 1% de ceux de la zone C.

Pour tout entier n , on a donc : (1) $a_{n+1} = \frac{9}{10}a_n + \frac{1}{10}b_n + \frac{1}{100}c_n$.


De même, d'une année sur l'autre, 90% des habitants de la zone B y restent, et ils sont rejoints par 10% des habitants de la zone A et 1% de ceux de la zone C.

Pour tout entier n , on a donc : (2) $b_{n+1} = \frac{1}{10}a_n + \frac{9}{10}b_n + \frac{1}{100}c_n$.

Enfin, d'une année sur l'autre, 98% des habitants de la zone C y restent, et ils ne sont rejoints par... personne. Pour tout n , on a donc : (3) $c_{n+1} = \frac{98}{100}c_n$.


Compte tenu des valeurs $a_0 = 5000$, $b_0 = 2000$ et $c_0 = 4000$, les relations (1), (2) et (3) définissent complètement les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .


Si on somme (1), (2) et (3), on obtient $a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$: la population totale reste donc constante, égale à sa valeur initiale $a_0 + b_0 + c_0 = 11000$.


On va illustrer le comportement des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) dans l'application .

Dans cette application, on sélectionne **Réurrence**, puis on fait « Edit/Tout effacer ».

On entre les définitions récursives des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) , et leurs valeurs initiales, comme indiqué fig1 (utiliser le menu « n, a_n » pour faciliter la saisie).

Avec l'icône , on définit ensuite les limites de la table des valeurs. On choisit de calculer les trente premières valeurs (donc on entre Début=0 et Fin=29).

On génère la table de valeurs par . Ici on a maximisé la fenêtre de la table par **Resize**, et affiché les quinze premiers termes (fig2), puis les quinze suivants (fig3).

Rappel : pour fixer le nombre de colonnes à afficher (ici quatre) il faut aller dans le menu « /Format Graphique/Spécial » et y renseigner « Modèle largeur cellule ».

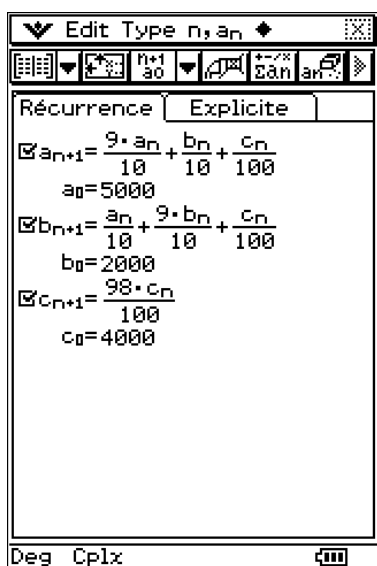


fig1 : définition des suites

n	a _n	b _n	c _n
0	5000	2000	4000
1	4740	2340	3920
2	4539	2619	3841
3	4385	2849	3764
4	4269	3040	3689
5	4183	3200	3615
6	4121	3335	3543
7	4078	3449	3472
8	4050	3546	3403
9	4033	3631	3334
10	4026	3704	3268
11	4027	3769	3202
12	4033	3827	3138
13	4044	3879	3076
14	4058	3926	3014

fig2 : pour $0 \leq n \leq 14$


n	a _n	b _n	c _n
15	4075	3970	2954
16	4094	4010	2895
17	4115	4047	2837
18	4136	4082	2780
19	4159	4115	2724
20	4182	4147	2670
21	4205	4177	2617
22	4228	4206	2564
23	4252	4234	2513
24	4275	4261	2463
25	4298	4287	2413
26	4321	4312	2365
27	4344	4337	2318
28	4366	4361	2271
29	4389	4384	2226

fig3 : pour $15 \leq n \leq 29$

Nous allons maintenant visualiser graphiquement le comportement des trois suites.
Pour cela, il faut que la fenêtre contenant la table des valeurs soit active.

On utilise  pour définir la fenêtre d'affichage.

On choisit l'intervalle $[0, 29]$ en abscisse (graduation de 1), l'intervalle $[2000, 5000]$ en ordonnée (graduation de 500).

Pour obtenir le tracé, on sélectionne . On peut maximiser la fenêtre par **Resize** (mais dans ce cas, il faut redéfinir à nouveau l'échelle en y , ou utiliser un « zoom boîte »).

Le Classpad utilise de lui-même des symboles différents pour qu'on distingue bien les trois suites.

Si on sélectionne « Analyse/Tracé », on peut alors déplacer le curseur sur les différents points affichés (déplacements horizontaux pour suivre une suite donnée, et verticaux pour passer d'une suite à une autre). On voit le résultat ci-contre (ici le curseur est sur le point représentatif de a_5).

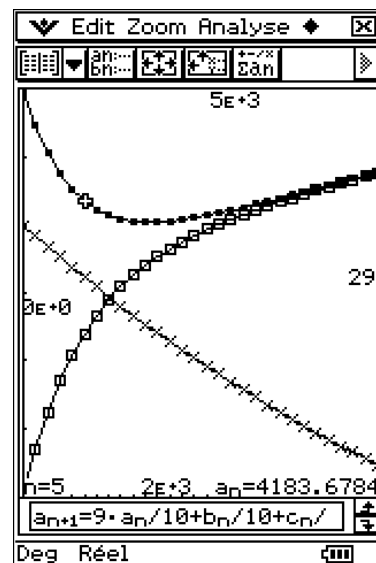




fig4 : tracé des 3 suites

Que ce soit à la lecture de la table des valeurs, ou (plus visuellement) à celle du graphique ci-dessus, on peut se risquer à quelques conjectures :

- La suite (a_n) semble d'abord décroissante puis croissante, et (b_n) semble croissante. Comme elles sont majorées, ces deux suites sont convergentes.
- Les deux suites (a_n) et (b_n) semblent converger vers une même limite.
- La suite (c_n) tend vers 0 en décroissant (ça c'est évident depuis le début, car son premier terme est positif et elle est géométrique de raison $q = 0.98$)

2. Pour étudier les suites (a_n) , (b_n) et (c_n) , l'application  est très convaincante.

On peut cependant également utiliser l'application , qui s'avère même plus commode pour étudier la suite de terme général $d_n = a_n - b_n$.

Reprenons et prolongeons donc l'étude précédente dans l'application .

On y crée une nouvelle feuille de travail par « Fich/Nouveau ».

On va calculer les cinquante premières valeurs des trois suites.


Dans les cellules A1, B1 et C1, on place les valeurs 5000, 2000 et 4000.

On place le curseur sur A2, on choisit la fonction « Edit/Remplir échelle » et on copie la formule $= (90A1+10B1+C1)/100$ sur la plage A2:A50.

Puisqu'il s'agit ici d'*adressage relatif*, cela signifie que pour tout k de $\{2, \dots, 50\}$ on place la formule $= (90A[k-1]+10B[k-1]+C[k-1])/100$ dans la cellule A[k].

On se place ensuite sur B2 et (toujours avec « Edit/Remplir échelle »), on copie la formule $= (10A1+90B1+C1)/100$ sur la plage B2:B50.

On se place enfin sur C2 et on copie la formule $= 98C1/100$ sur C2:C50.

Ce n'est qu'alors que la feuille de calcul contient réellement les cinquante premiers termes des trois suites (fig5). Ce sont bien les mêmes valeurs qu'avec . L'examen des derniers termes achève de nous convaincre que (a_n) et (b_n) ont une même limite (fig6).

Pour former les cinquante premiers termes de la suite de terme général $d_n = a_n - b_n$, on place le curseur sur D1 et (toujours avec la fonction « Edit/Remplir échelle »!) on copie la formule =A1-B1 sur D1:D50.

On peut “subodorer” que la suite (d_n) est géométrique. Pour en avoir le cœur net, on se place sur E2 et on copie la formule =D2/D1 sur E2:E50.

Le résultat est assez clair (fig7) : la suite (d_n) semble géométrique de raison 4/5.

	A	B	C
1	5000	2000	4000
2	4740	2340	3920
3	4539.2	2619.2	3841.6
4	4385.6	2849.6	3764.8
5	4269.7	3040.9	3689.5
6	4183.7	3200.6	3615.7
7	4121.5	3335.1	3543.4
8	4078.3	3449.2	3472.5
9	4050.1	3546.8	3403.1
10	4033.8	3631.2	3335.0
11	4026.9	3704.8	3268.3
12	4027.4	3769.7	3202.9
13	4033.6	3827.5	3138.9
14	4044.4	3879.5	3076.1
15	4059.7	3926.7	3014.4

fig1 : $a_0, b_0, c_0 \rightarrow a_{13}, b_{13}, c_{13}$

	A	B	C
37	4534.1	4533.1	1932.9
38	4553.3	4552.5	1894.2
39	4572.2	4571.5	1856.3
40	4590.7	4590.2	1819.2
41	4608.8	4608.4	1782.8
42	4626.6	4626.3	1747.1
43	4644.0	4643.8	1712.2
44	4661.1	4660.9	1678.0
45	4677.9	4677.7	1644.4
46	4694.3	4694.2	1611.5
47	4710.4	4710.3	1579.3
48	4726.2	4726.1	1547.7
49	4741.7	4741.6	1516.7
50	4756.8	4756.8	1486.4

fig2 : jusqu'à a_{49}, b_{49}, c_{49}

	D	E	F
1	3000		
2	2400	0.8	
3	1920	0.8	
4	1536	0.8	
5	1228.8	0.8	
6	983.04	0.8	
7	786.43	0.8	
8	629.15	0.8	
9	503.32	0.8	
10	402.65	0.8	
11	322.12	0.8	
12	257.70	0.8	
13	206.16	0.8	
14	164.93	0.8	
15	131.94	0.8	

fig3 : (d_n) est géométrique

3. L'égalité $c_{n+1} = \frac{98}{100}c_n$ signifie que la suite (c_n) est géométrique de raison $\frac{98}{100}$.

Pour tout entier n , on a donc $c_n = \left(\frac{98}{100}\right)^n c_0 = 4000\left(\frac{98}{100}\right)^n$.

Par différence de $a_{n+1} = \frac{90a_n + 10b_n + c_n}{100}$ et $b_{n+1} = \frac{10a_n + 90b_n + c_n}{100}$ on a $d_{n+1} = \frac{8d_n}{10}$.

La suite (d_n) est donc géométrique de raison 8/10.

Il en résulte $d_n = \left(\frac{8}{10}\right)^n d_0 = \left(\frac{8}{10}\right)^n (a_0 - b_0) = 3000\left(\frac{8}{10}\right)^n$.



On sait que $a_n + b_n = 11000 - c_n$ et on connaît l'expression de $a_n - b_n = d_n$.


Il en résulte : $a_n = 5500 + \frac{d_n - c_n}{2} = 5500 + 1500\left(\frac{8}{10}\right)^n - 2000\left(\frac{98}{100}\right)^n$.

De même $b_n = 5500 - \frac{c_n + d_n}{2} = 5500 - 1500\left(\frac{8}{10}\right)^n - 2000\left(\frac{98}{100}\right)^n$.

Finalement, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 5500$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

Vérification utile : la somme de ces trois limites est égale à 11000, valeur constante de la population totale.

Une dernière remarque : comme on l'a fait dans l'application , on peut afficher le graphique des valeurs des trois suites dans l'application .

Il suffit pour cela de sélectionner les colonnes A,B,C et de choisir « Type/Courbe/Groupé » (ou plus simplement de toucher l'icône  avec le stylet).