Distance d'un point à une courbe

Énoncé

Dans le plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction exponentielle et le point B a pour coordonnées $(2; -1)$.

On admet que la distance BM admet un minimum quand M décrit $\mathscr{C}$. Ce minimum est appelé distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

Le but de l'exercice est de trouver la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure dynamique correspondant à cette situation.

   > Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

   (a) M est un point quelconque de la courbe $\mathscr{C}$. Faire une conjecture sur la position du point M pour laquelle la distance BM semble minimale.
   On appelle ce point M_0.

   (b) Tracer la droite d perpendiculaire en M_0 à la droite (BM_0).
   Quelle semble être la position particulière de la droite d ?

   > Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures émises
   > et lui indiquer la ou les méthodes de contrôle prévues à la question (c).

   (c) Utiliser le logiciel pour contrôler les conjectures et, éventuellement, les rectifier.

2. On se propose de déterminer la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

   > Appeler l'examinateur pour lui présenter les contrôles faits
   > et lui proposer une méthode permettant à la fois de
   > déterminer le point M_0 et la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$.

   (a) Déterminer, par le calcul, la position du point M_0.

   (b) Quelle est la valeur exacte de la distance du point B à la courbe $\mathscr{C}$?

3. Vérifier, par le calcul, la conjecture formulée au 1.(b).

Production demandée

- Obtention à l'écran de la figure réalisée avec le logiciel de géométrie dynamique.
- La formulation des conjectures et leur contrôle.
- Les stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question 2 et le résultat des calculs.
- La vérification demandée à la question 3.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. On ouvre l'application Géométrie, et on fait place nette par « `Fich/Nouveau` ».

   Avec l'icône de la grille, on affiche les axes et les points à coordonnées entières.

   Avec « `Tracé/Fonction/f(x)` », on trace la courbe $\mathscr{C}$ représentative de $y = \mathrm{e}^x$.

   On choisit l'icône (ou la fonction « `Tracé/Constuire/Tangente à la courbe` ») et on glisse le stylet à l'écran jusqu'à sélectionner la courbe $\mathscr{C}$. On relâche alors le stylet : un point A est créé sur la courbe, ainsi que la tangente en ce point.

   On peut bien sûr renommer ce point en M : glisser le stylet sur l'écran jusqu'à ce que le point soit sélectionné, puis ▶ et modifier le champ qui contient le nom.

   Remarque : on pouvait se contenter de créer (avec) un point sur la courbe. Ajouter la tangente dès maintenant anticipe sur la suite de l'exercice.

   On sélectionne l'icône (ou on choisit « `Tracé/point` ») puis on place le point de coordonnées $(2, -1)$ (on glisse le stylet à la surface de l'écran et on le relâche à proximité du point visé : le magnétisme des points de la grille est ici très utile). Le Classpad nomme automatiquement B le nouveau point, ce qui nous convient parfaitement.

   On voit (fig1) ce qu'il en est à ce moment de la construction.

   Il n'est plus très utile de conserver l'affichage des points à coordonnées entières. On utilise donc « `Aff/Grille entier` » pour s'en débarrasser et ne conserver que les axes de coordonnées (on peut aussi utiliser l'icône).

   On va zoomer sur la partie utile du tracé : sélectionner « `/Fenêtre Aff` » puis préciser $[-2.5, 2.5]$ en abscisse et 1 comme ordonnée médiane.

   On trace le segment $[BM]$ (sélectionner l'icône puis ces deux points).

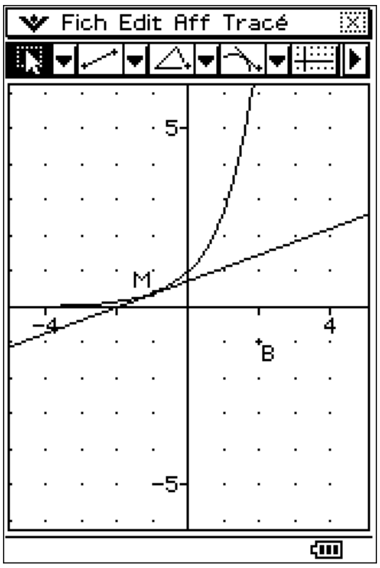

fig1 : le point $B(2, -1)$ et la tangente en M à $\mathscr{C}$

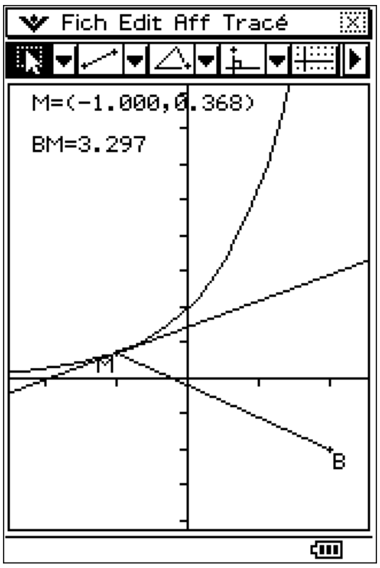

fig2 : le point M et la longueur de $[BM]$

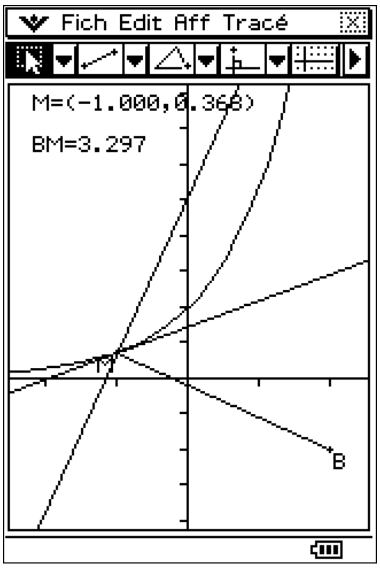

fig3 : la perpendiculaire en M au segment $[BM]$

On va maintenant afficher les coordonnées du point M et la longueur du segment $[BM]$.

On sélectionne le point M, puis et on visualise le champ (qui affiche les coordonnées du point). Un appui sur cette icône crée un champ numérique contenant ces coordonnées. On renomme ce champ en `M=` et on le place à sa guise avec le stylet.

Ensuite on sélectionne le segment $[BM]$, puis . Un appui sur l'icône crée un champ numérique contenant cette longueur : on le renomme en `=BM` et on le place où on veut.

On peut régler le format d'affichage de ces deux valeurs dans « `/Format Géométrie` ». Ici on a choisi le format `Fix 3` (fig2).

Pour construire la perpendiculaire en M à $[BM]$, on sélectionne ce point et ce segment avec le stylet, puis l'icône ou « `Tracé/Construire/perpendiculaire` » (fig3).

On va maintenant animer la figure. Pour cela, on sélectionne le point M et la courbe $\mathscr{C}$, et on choisit la fonction « `Edit/Animer/Ajouter animation` ».

La fonction « `Edit/Animer/Editer Animations` » affiche une fenêtre permettant de régler les paramètres de notre animation.

On voit pour l'instant (fig4) que celle-ci comporte 20 étapes, et que le point M est défini par un paramètre t (visiblement son abscisse) variant entre $t_0 = -2.5$ et $t_1 = 2.5$ (c'est-à-dire les extrémités actuelles de l'intervalle d'affichage pour les abscisses).

On va modifier le nombre d'étapes en la fixant à 51 étapes, toujours de l'abscisse $t_0 = -2.5$ à l'abscisse $t_1 = 2.5$.

Il y aura donc 50 intervalles de longueur 0.1 (de cette manière les abscisses successives du point M seront -2.5, -2.4, -2.3, ... , 2.4 et 2.5).

On ferme cette fenêtre de réglage par un appui du stylet sur , et on ouvre le menu d'animation par « `Aff/Animation UI` » (fig6).

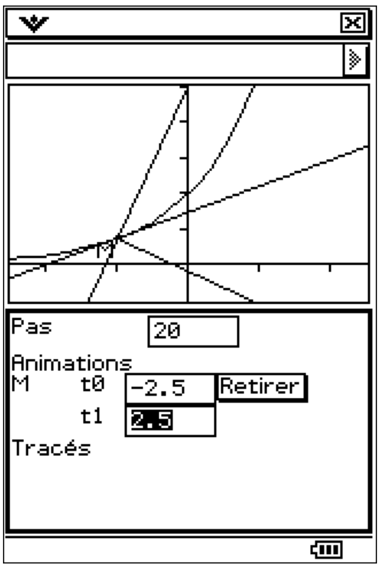

fig4 : les paramètres actuels de l'animation de M

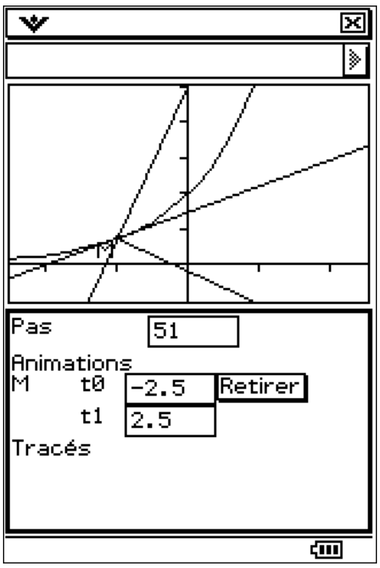

fig5 : 51 étapes (donc 50 intervalles) sur $[-2.5, 2.5]$

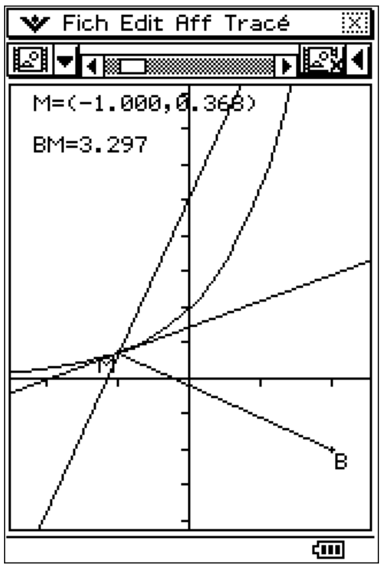

fig6 : le menu d'animation `UI`

Avec le curseur, on peut se déplacer pas à pas dans l'animation, de l'abscisse minimum ($x = -2.5$) à l'abscisse maximum ($x = 2.5$), en passant par toutes les étapes intermédiaires (fig7 à 9).

Pendant l'animation de M, tout ce qui dépend de la position de ce point est actualisé (la tangente en M à la courbe, la perpendiculaire en M à $[BM]$, l'affichage des coordonnées de M et de la longueur BM).

On voit en particulier que BM est minimum quand le point M a pour coordonnées $(0, 1)$.

À ce moment précis, la droite d (c'est-à-dire la perpendiculaire en M à $[BM]$) et la tangente en M à la courbe $\mathscr{C}$ sont confondues (fig10).

Celà signifie que le point $M = M_0 = (0, 1)$ est à la fois le point de la courbe $\mathscr{C}$ qui est le plus proche de B et la "projection orthogonale" de B sur cette courbe (car la droite (BM_0) est la normale en M_0 à $\mathscr{C}$).

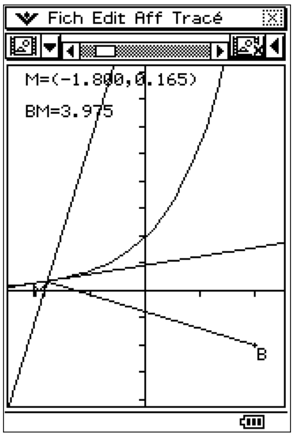

fig7 : $x = -1.8$

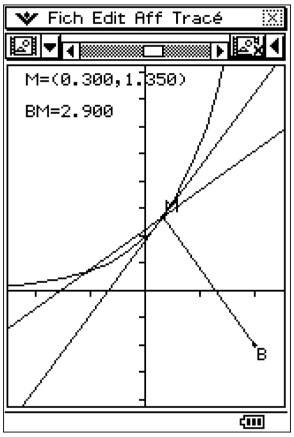

fig8 : $x = 0.3$

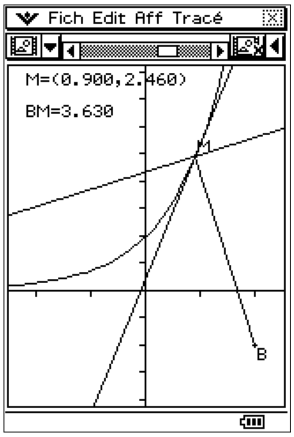

fig9 : $x = 0.9$

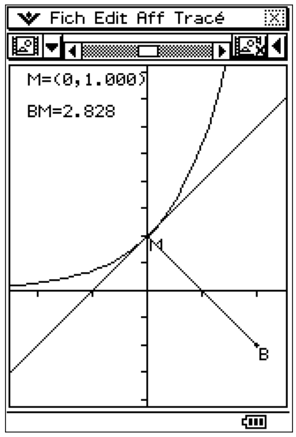

fig10 : le point M_0

2. Les coordonnées de B sont $(2, -1)$. Notons (x, e^x) celles de M.

   Il s'agit de minimiser $f(x) = BM^2 = (x-2)^2 + (\mathrm{e}^x + 1)^2 = \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x + x^2 - 4x + 5$.

   Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2(\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + x - 2)$ et $f''(x) = 2(2\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x + 1) > 0$.

   Ainsi f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or $f'(0) = 0$.

   On en déduit $f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'application f possède donc un minimum absolu pour $x = 0$, c'est-à-dire quand $M = M_0 = (0, 1)$.

   La distance de B à la courbe $\mathscr{C}$ est donc $BM_0 = \sqrt{f(0)} = 2\sqrt{2} \approx 2.828$.

   La tangente en M_0 à $\mathscr{C}$ a pour équation $y = x + 1$: elle est dirigée par le vecteur $(1, 1)$.

   Or ce même vecteur est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BM_0} = (-2, 2)$.

   Conclusion : on peut dire que la position de M qui minimise BM est la projection orthogonale M_0 du point B sur la courbe $\mathscr{C}$.

   Remarque : l'unicité de M_0 est due au caractère convexe de la courbe $\mathscr{C}$ et à la position de B (du coté opposé à la concavité de la courbe).

   On vérifie par exemple que pour tout point $M(x, \mathrm{e}^x)$, la tangente en M à $\mathscr{C}$ est dirigée par $u_x = (1, \mathrm{e}^x)$. On a alors $\overrightarrow{BM} \cdot u_x = (x-2) + \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + 1)$ (et on a vu plus haut que ce produit scalaire n'est nul *que* si $x = 0$).