Étude d'un lieu de points

Énoncé

On considère le carré direct $ABCD$ du plan orienté tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.
On appelle O le centre du carré.
Un point M décrit le segment $[DC]$.
La perpendiculaire à la droite (AM) passant par A coupe (BC) en N.
On appelle I le milieu de $[MN]$.
On se propose de déterminer le lieu des points I lorsque M décrit le segment $[DC]$.

Étude expérimentale

1. Réaliser la figure avec un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la figure réalisée.

2. Mettre en évidence avec le logiciel la nature du triangle AMN.

3. Faire afficher le lieu des points I lorsque M décrit le segment $[DC]$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification des conjectures et pour lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Démonstrations

4. Démontrer que le triangle AMN est rectangle isocèle (on pourra utiliser une rotation de centre A).

5. En déduire la nature du triangle AIM ; établir que le point I est l'image de M par une similitude S de centre A dont on précisera l'angle et le rapport.

6. Déterminer $S(D)$ et $S(C)$ puis conclure sur le lieu de points cherché.

Production demandée

- Figure réalisée avec un logiciel de géométrie dynamique
- Réponses argumentées pour les questions 5 et 6.

Proposition de corrigé avec le Classpad

Étude expérimentale

1. On ouvre l'application Géométrie et on débute une nouvelle figure par « `Fich/Nouveau` ».

   Au besoin, on supprime l'affichage des axes et de la grille des points à coordonnées entières par des appuis sur (pour les axes et cette grille, le comportement par défaut, lors de la création d'une nouvelle figure, peut être modifié dans « `/Format Géométrie` »).

   On choisit la fonction « `Tracé/Forme spéciale/Carré` » (ou plus simplement l'icône) et on se contente de toucher l'écran avec le stylet.

   Un carré $ABCD$ apparaît alors, occupant la plus grande partie de l'écran.

   Ce carré n'est malheureusement pas orienté dans le sens indiqué par l'énoncé. Il faut donc renommer le point D en B, et le point B en D (pour renommer un point, on le sélectionne, et un appui sur permet d'accéder au champ qui contient le nom).

   Pour créer le centre du carré, on sélectionne les points B et D (ou les points A et C) puis la fonction « `Tracé/Construire/Milieu` » (ou plus simplement l'icône). On renomme en O le point obtenu (fig1).

   Avec l'icône, on place un point sur le segment $[DC]$ (sélectionner d'abord l'icône, poser et glisser le stylet sur l'écran jusqu'à ce que $[DC]$ soit sélectionné, puis relever le stylet : le point est créé et il est lié à $[DC]$). On renomme en M le point obtenu.

   Avec l'icône (ou « `Tracé/Droite infinie` ») on trace la droite (BC) (sélectionner l'icône, glisser le stylet sur l'écran jusqu'au point B, relever le stylet, le glisser à nouveau jusqu'au point C, le relever à nouveau : la droite (BC) est créée).

   De même, on crée le segment $[AM]$ avec ou « `Tracé/segment de droite` » (fig2).

   Pour tracer la perpendiculaire en A à la droite (AM), on sélectionne ce point et cette droite, puis l'icône (ou la fonction « `Tracé/Construire/Perpendiculaire` »).

   Il est probable que le point d'intersection de cette perpendiculaire et de la droite (BC) soit hors de l'écran. On prend donc un peu de recul avec (fig3).

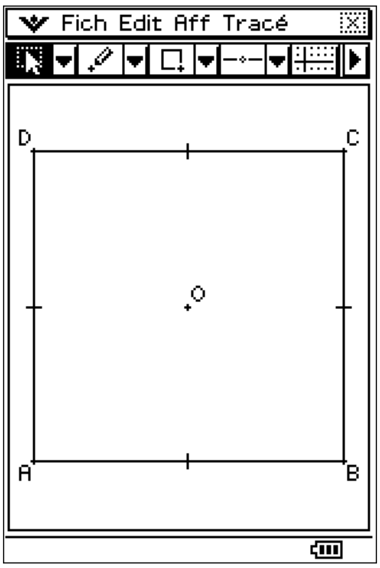

fig1 : le carré $ABCD$ et son centre 0

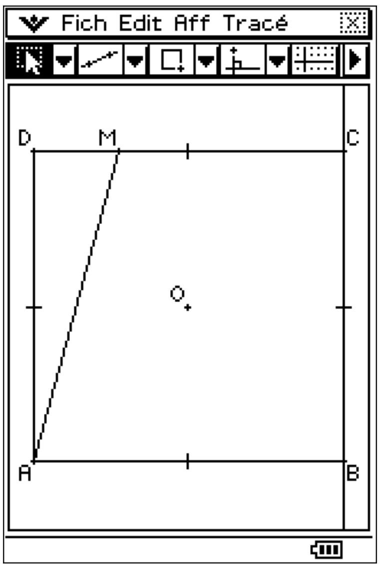

fig2 : le point M, la droite (BC) et le segment $[AM]$

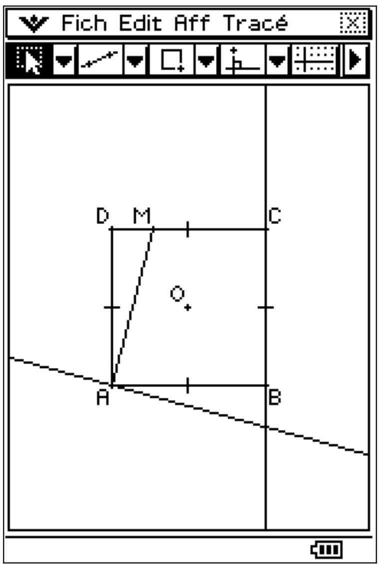

fig3 : la perpendiculaire en A à $[AM]$

Pour créer leur intersection, on sélectionne les deux droites nouvellement créées puis (ou « Tracé/Construire/Intersection »). On renomme en N le point obtenu.

Pour construire le segment $[MN]$, on sélectionne l'icône puis ces deux points.

On sélectionne $[MN]$ puis l'icône . On renomme en I le milieu ainsi obtenu.

On va également procéder à un ajustement esthétique. Pour cela on cache la droite (AN) (la sélectionner puis « Edit/Propriétés/Caché ») et on trace le segment $[AN]$ (fig4).

À tout moment, on peut se rapprocher un peu avec (fig5).

On peut modifier la position du point M sur le segment $[DC]$ (sélectionner ce point, relever le stylet, le poser à nouveau sur le point sélectionné, le "tirer" sur l'écran puis relever le stylet). Le point M étant lié au segment $[DC]$, on ne peut l'en détacher.

2. On va vérifier que AMN (dont on sait déjà qu'il est rectangle en A) est isocèle en A.

   Pour cela, on sélectionne le coté $[AM]$ et le coté $[AN]$. Un appui sur permet d'accéder à une liste dans laquelle on peut choisir l'icône .

   Le choix de cette icône affiche alors invariablement (quelle que soit la position de M sur $[DC]$) la réponse Oui, confirmant ainsi que AMN est isocèle en A (fig6).

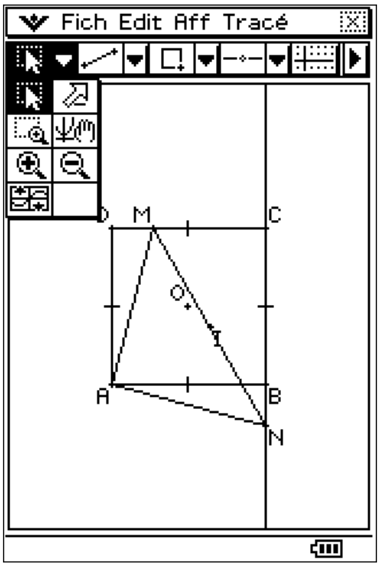

fig4 : le point N et le milieu I de $[MN]$

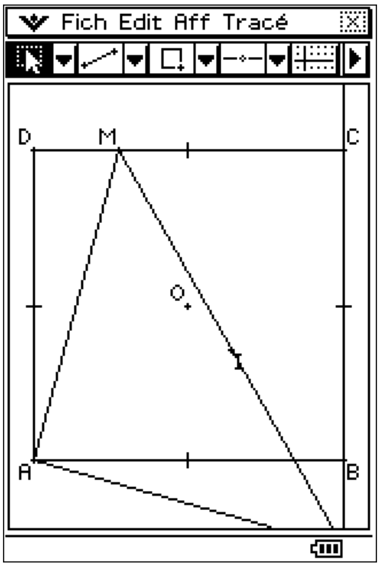

fig5 : on peut s'approcher par et reculer par

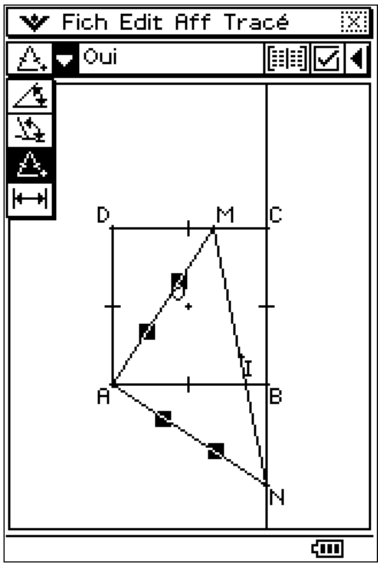

fig6 : pour tout M de $[DC]$, AMN est isocèle en A.

3. On va maintenant créer une animation du point M sur le segment $[DC]$.

   On sélectionne ce point et ce segment, et « Edit/Animer/Ajouter Animation » (fig7).

   La fonction « Edit/Animer/Editer Animations » permet de régler les paramètres de l'animation. On peut fixer le nombre d'étapes (par exemple 40) et les positions extrêmes : ici $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ signifient qu'on va décrire tout le segment $[DC]$ (fig8).

   On ferme cette fenêtre par un appui sur (les modifications sont sauvegardées).

   Pour tracer le lieu du point I quand M décrit le segment $[DC]$, on sélectionne I puis la fonction « Edit/Animer/Tracé ».

   Il ne reste plus qu'à lancer l'animation (« Edit/Animer/Lancer (une fois) ») pour observer les différentes étapes et constater que I décrit le segment $[OB]$ (fig9).

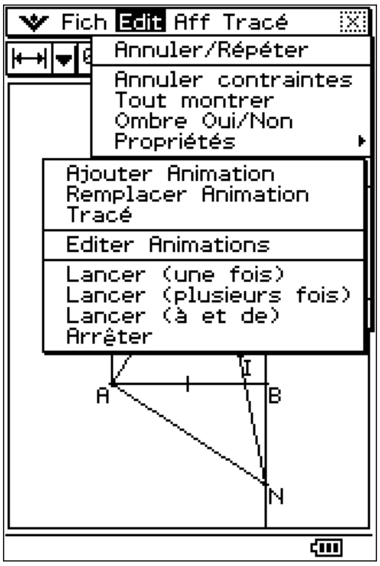

fig7 : définir l'animation...

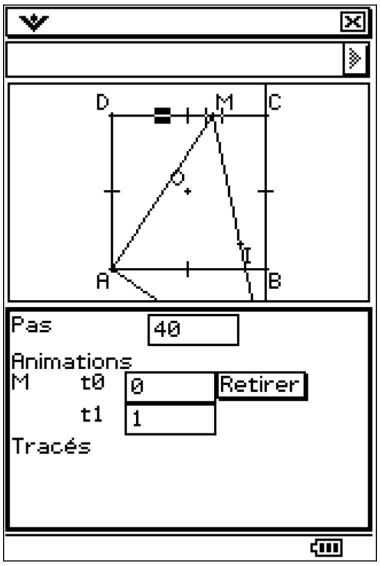

fig8 : ... et la paramétrer

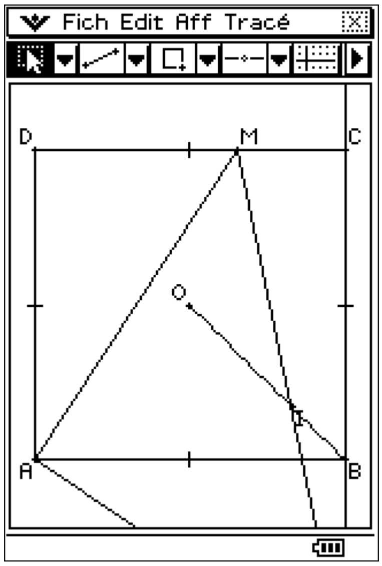

fig9 : le lieu de I

Démonstrations

4. Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   Notons Δ la droite (AM) et Δ' la perpendiculaire en A à Δ.

   La rotation r envoie Δ sur Δ' et la droite (DC) sur la droite (CB).

   Elle envoie donc l'intersection M de Δ et (DC) sur l'intersection N de Δ' et (CB).

   Autrement dit le triangle AMN est rectangle isocèle en A (de sens indirect).

5. AMN étant isocèle en A, le milieu I de $[MN]$ est aussi le pied de la hauteur issue de A.

   On en déduit que le triangle AIM est rectangle en I.

   Il est même isocèle en I. En effet la droite (AI) est la bissectrice intérieure en A au triangle AMN, et il en résulte $(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AI}}) = -\dfrac{\pi}{4}$.

   En particulier $AI = AM \cdot \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{AM}{\sqrt{2}}$

   I est donc l'image de M par la similitude s de centre A, d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. On a clairement $s(D) = O$ et $s(C) = B$. On en déduit que $s([DC]) = [OB]$.

   Ainsi, quand le point M décrit $[DC]$, le point $I = s(M)$ décrit $[OB]$.