Recherche d'un lieu géométrique

Énoncé

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle isocèle ABB' tel que : $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BA}) = \dfrac{\pi}{2}$.
Soit M un point variable de la droite (BB') et M' l'image de A dans la rotation de centre M et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.
On note I le milieu de $[BB']$ et J le milieu de $[MM']$.
On cherche à déterminer le lieu du point J lorsque M décrit la droite (BB').

1. (a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

   (b) Visualiser le lieu du point J quand M décrit la droite (BB').
   Quelle conjecture peut-on émettre ?

   (c) Que peut-on conjecturer à propos des triangles ABI et AMJ ?

   Appeler l'examinateur pour vérification des conjectures.

2. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en I.

   (a) Déterminer l'image du point M par la similitude S.

   Appeler l'examinateur pour faire le point et lui indiquer la méthode prévue pour la résolution de la question 2.(b).

   (b) En déduire le lieu du point J quand M décrit la droite (BB').

Production demandée

- Visualisation à l'écran de la figure ;
- Formulation orale des conjectures sur le lieu du point J et sur les triangles ABI et AMJ ;
- Réponses argumentées aux questions 2.(a) et 2.(b).

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. On ouvre l'application Géométrie et on débute une nouvelle figure par « `Fich/Nouveau` ».

   On supprime au besoin l'affichage des axes et la grille des points entiers avec .

   On trace la droite $y = 0$, avec « `Tracé/Fonction/f(x)` ». La fenêtre étant par défaut centrée à l'origine, cette droite horizontale partage l'écran à parts égales.

   Avec l'icône , on place deux points sur cette droite (sélectionner l'icône, poser et glisser le stylet jusqu'à ce que la droite soit sélectionnée, puis relever le stylet : le point est créé et il est lié à la droite).

   On renomme en B et B' ces deux points (pour renommer un point, le sélectionner puis donne accès au champ contenant le nom).

   Pour créer le milieu I du segment $[BB']$, on sélectionne les points B, B' puis on choisit « `Tracé/Construire/Milieu` » (ou l'icône). On renomme en I le point obtenu.

   Avec , on crée ensuite un point sur la droite (BB') (mais pas forcément à l'intérieur du segment $[BB']$) auquel on donne le nom M (fig1).

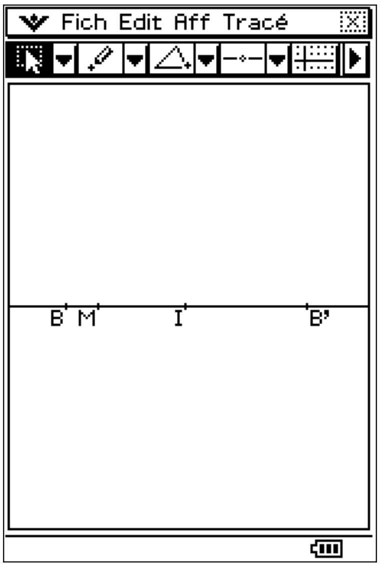

fig1 : la droite (BB') et les points I et M

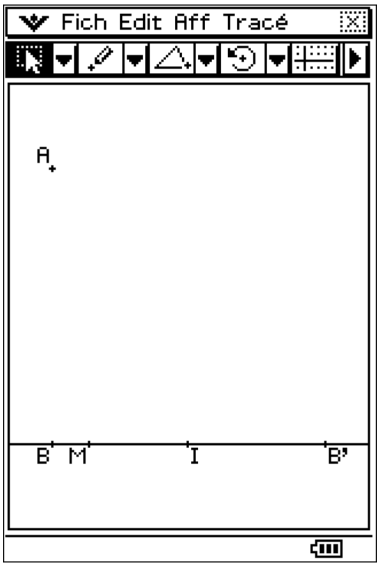

fig2 : A = image de B' par la rotation $r(B, 90^\circ)$

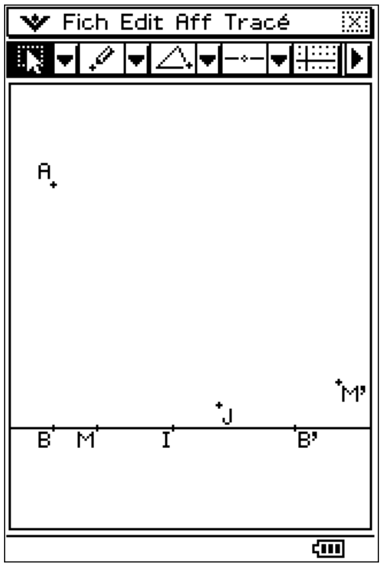

fig3 : M' = image de A par la rotation $r(M, -90^\circ)$

   Pour créer A, on sélectionne B', puis (ou « `Tracé/Construire/Rotation` »), puis le point B (le centre de la rotation). On précise ensuite un angle de 90°. Si le point créé est en dehors des limites de la fenêtre, on choisit (ou « `Aff/Zoom plein écran` ») pour recentrer la figure. On renomme en A le point créé (fig2).

   On construit ensuite l'image (renommée en M') de A dans la rotation de centre M et d'angle -90°. Là encore, on peut avoir besoin de recentrer la figure avec .

   On crée le milieu de $[MM']$ (sélectionner M et M' puis) et on le renomme en J.

   On peut ensuite vérifier que la figure est correcte en déplaçant le point M sur la droite (BB') (sélectionner ce point puis "tirer" la sélection avec le stylet).

   On voit (fig3) le résultat, à ce stade de la construction.

On va maintenant créer une animation du point M sur la droite (BB'), c'est-à-dire sur la droite $y = 0$ (remarque : on peut animer un point sur une courbe, mais pas sur une droite ; c'est la raison pour laquelle on a tracé la droite en tant que courbe $y = 0$).

On sélectionne ce point et cette droite, et « `Edit/Animer/Ajouter Animation` ».

La fonction « `Edit/Animer/Editer Animations` » permet de paramétrer l'animation.

On peut ainsi fixer le nombre d'étapes (par exemple 30).

On peut également régler les positions extrêmes de l'animation : ici t_0 et t_1 désignent respectivement les abscisses minimum et maximum sur l'axe $y = 0$. Elles correspondent par défaut à l'intervalle horizontal de la fenêtre, mais on peut les modifier et notamment élargir l'intervalle pour donner l'illusion d'un déplacement de M sur un segment excédant très largement $[BB']$. On a choisi ici l'intervalle $[-10, 10]$ (fig4).
On ferme cette fenêtre par un appui sur ☒ (les modifications sont sauvegardées).

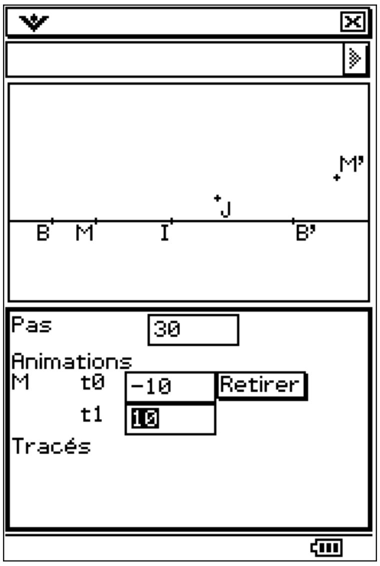

fig4 : animation en 30 étapes de $x = -10$ à $x = 10$

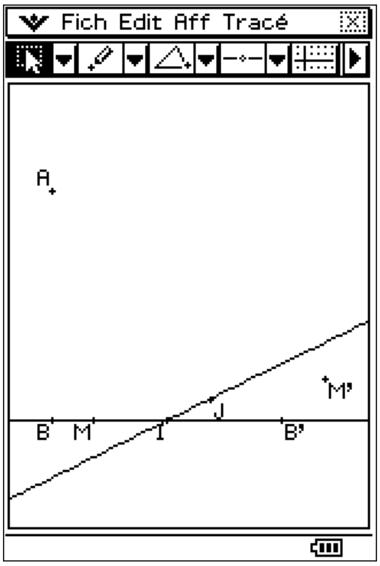

fig5 : le lieu du point J quand M décrit (BB')

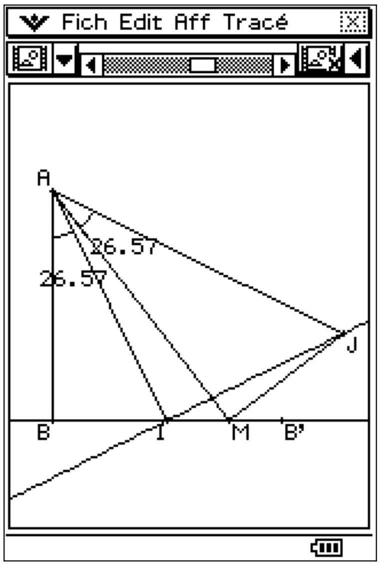

fig6 : les triangles semblables ABJ et AMJ

Pour tracer J quand M décrit (BB'), on sélectionne J puis « `Edit/Animer/Tracé` ».

On lance l'animation (« `Edit/Animer/Lancer (une fois)` ») pour observer les différentes étapes et on constate qu'apparemment J décrit une droite passant par I (fig5).

L'énoncé demande de formuler une conjecture concernant les triangles ABI et AMJ.

Pour y voir plus clair, on trace ces deux triangles (utiliser l'icône qui permet de tracer un polygône fermé quelconque : le polygône est terminé quand on revient au point de départ).

Il semble bien que ABI et AMJ soient semblables. Ils sont rectangles (l'un en B, l'autre en M). Il suffit de vérifier que les angles en leur sommet commun A sont égaux.

Pour cela, on sélectionne $[AB]$ et $[AI]$ puis « `Tracé/Angle (marqué)` ». Cela a pour effet de marquer la valeur de l'angle $\widehat{BAI}$. On marque également $\widehat{MAJ}$.

On constate que ces deux angles sont égaux : les triangles ABI et AMJ sont donc semblables. On peut modifier la position de M sur (BB') en utilisant le menu d'animation (« `Aff/Animation UI` ») et en utilisant les facilités du curseur. L'égalité des angles $\widehat{BAI} = \widehat{MAJ}$ (tous les deux égaux à 26.57°) est permanente (fig6).

Voici trois étapes de l'animation (fig7 à fig9) : avec « `Edit/Propriétés/Caché` » on a masqué le lieu de J pour mieux faire ressortir les triangles ABI et AMJ.

Pour afficher au mieux chacune de ces trois étapes, on a utilisé les fonctions de recadrage du Classpad (zoom arrière et zoom boîte).

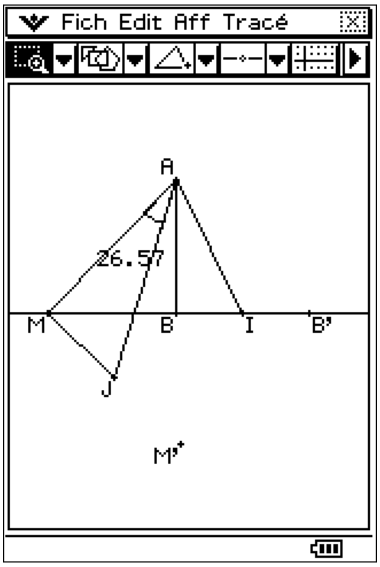

fig7

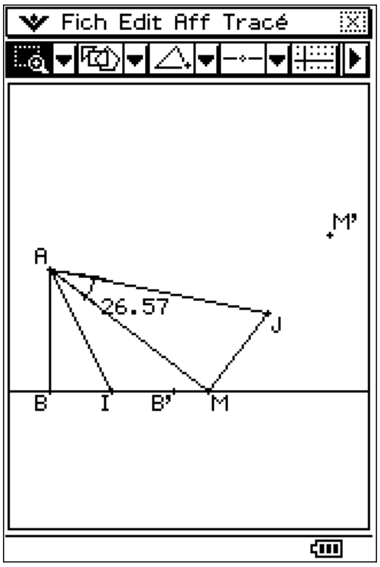

fig8

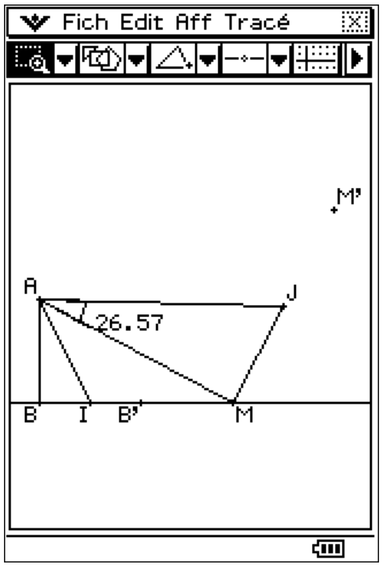

fig9

Trois étapes de l'animation quand le point M décrit la droite (BB')

2. Soit S la similitude directe de centre A qui transforme B en I.

   L'angle θ de cette similitude est défini par $\tan\theta = \dfrac{BI}{AB} = \dfrac{1}{2}\dfrac{BB'}{AB} = \dfrac{1}{2}$.

   Avec le Classpad, en mode `Décimal` et `Degrés`, on trouve $\theta \approx 26.565^\circ$ (ce qui correspond bien à la valeur relevée sur la figure réalisée précédemment).

   Le rapport de cette similitude est $\dfrac{AI}{AB} = \dfrac{1}{\cos\theta} \approx 1.118$.

   Pour vérifier que $s(M) = J$, on peut utiliser les affixes, et considérer que le point A est l'origine du plan complexe (donc $z_A = 0$).

   Avec des notations évidentes, on a $z_{B'} - z_B = -i(z_A - z_B)$ donc $z_{B'} = (1+i)z_B$.

   On en déduit $z_I = \dfrac{z_B + z_{B'}}{2} = \Big(1+\dfrac{i}{2}\Big)z_B$. La similitude directe S de centre A transformant B en I est donc définie par $z \mapsto Z = az$, avec $a = 1+\dfrac{i}{2}$: son rapport est $|a| = \dfrac{\sqrt{5}}{2} \approx 1.118$ et son angle $\theta = \arg(a) \in \Big]0, \dfrac{\pi}{2}\Big[$ est défini par l'égalité $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$.

   De même $z_{M'} - z_M = -i(z_A - z_M)$ donc $z_{M'} = (1+i)z_M$ puis $z_J = \dfrac{z_M + z_{M'}}{2} = \Big(1+\dfrac{i}{2}\Big)z_M$.

   Ainsi $S(M) = J$. Il en résulte que quand le point M décrit la droite (BB'), le point $J = S(M)$ décrit l'image Δ de la droite (BB') par la similitude S.

   Δ est la droite passant par $S(B) = I$ et telle que $(\widehat{(BB'),\Delta}) = \theta \approx 26.565^\circ$.