Positions relatives dans une configuration

Énoncé

Dans le plan orienté, on définit le triangle OAB et on note M le milieu du segment $[AB]$. On construit les triangles AOD et OBC directs, rectangles et isocèles en O.

L'objet du problème est d'étudier les longueurs et les positions relatives des segments $[OM]$ et $[DC]$.

Étude expérimentale

1. Construire la figure décrite précédemment à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour valider la construction.

2. En modifiant le triangle OAB, émettre une conjecture concernant les longueurs OM et DC et une autre au sujet des positions relatives des droites (OM) et (DC).

   Appeler l'examinateur pour valider les conjectures et exposer la démarche envisagée pour la preuve.

Démonstrations

3. Proposer une démonstration des conjectures faites.

Production demandée

- Construction de la figure ;
- énoncé des deux conjectures ;
- Réponses argumentées à la question 3.

Proposition de corrigé avec le Classpad

Étude expérimentale

1. On ouvre l'application Géométrie et on débute une nouvelle figure par « `Fich/Nouveau` ».

   On supprime au besoin l'affichage des axes et la grille des points entiers avec .

   On sélectionne l'icône (ou « `Tracé/Forme Spéciale/Triangle` ») et on délimite une zone rectangulaire en glissant le stylet à la surface de l'écran. Le triangle est tracé au moment où on relève le stylet.

   Les sommets de ce triangle sont automatiquement nommés A, B, C dans le sens direct.

   On renomme A en O et C en A (on dispose ainsi d'un triangle OAB direct : pour renommer un point, on le sélectionne et donne accès au champ contenant le nom).

   Le point D est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$. De même, le point C est l'image de B dans la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.

   Pour construire D et C, on commence par sélectionner le point qui doit subir la rotation (donc A ou B) puis on choisit l'icône (ou « `Tracé/Construire/Rotation` »).

   Il faut alors sélectionner le centre O de la rotation, puis préciser l'angle de celle-ci dans la fenêtre ad hoc (-90° dans un cas, 90° dans l'autre). On renomme les deux points obtenus en C et D : si l'un de ces points est hors écran, on recentre la figure avec .

   On crée le milieu du segment $[AB]$ (sélectionner ce segment puis l'icône , ou la fonction « `Tracé/Construire/Milieu` »). On renomme en M le point ainsi créé (fig2).

   On sélectionne l'outil et on trace les segments $[OC]$, $[OD]$, $[OM]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. La figure est alors complète (fig3).

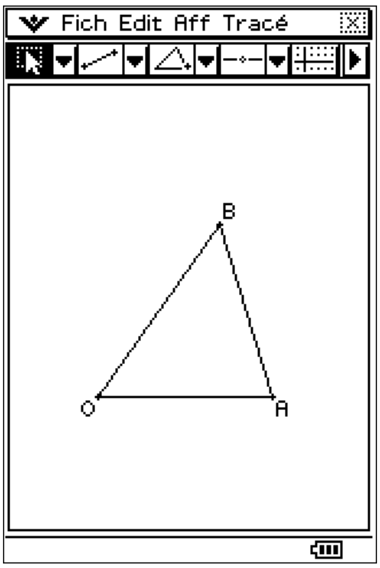

fig1 : le triangle OAB

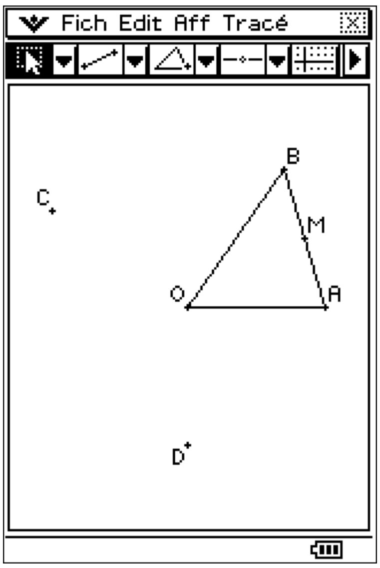

fig2 : les points C, D et M

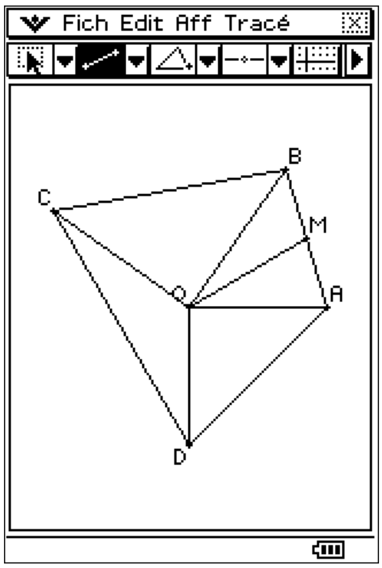

fig3 : la figure complétée

On doit émettre une conjecture concernant les longueurs OM et DC et une autre au sujet des positions relatives des droites (OM) et (DC).

On va demander au Classpad ce qu'il en pense ! Pour cela, on sélectionne le segment $[CD]$. Un appui sur donne accès à une liste dans laquelle on trouve le champ (qui donne la longueur du segment). Un appui sur cette icône crée un champ numérique contenant cette longueur. On renomme ce champ en `CD=` et on le place à sa guise avec le stylet.

Ensuite on sélectionne le segment $[OM]$, puis et un appui sur crée un champ numérique contenant cette longueur : on le renomme en `=OM` et on le place où on veut.

Il semble que les droites (OM) et (CD) soient orthogonales. Pour le confirmer, on sélectionne les deux segments, puis pour accéder au champ (qui indique effectivement 90°). Par un appui sur , on crée un champ numérique contenant cet angle et on le positionne à l'écran (fig4).

On remarque que la longueur CD est le double de la longueur OM. Juste pour le plaisir, on peut en demander une vérification numérique en calculant à l'écran le rapport des deux longueurs. Pour cela, on sélectionne « `Tracé/Expression` » : les trois expressions présentes à l'écran sont automatiquement numérotées dans l'ordre de leur création.

Dans le champ de saisie, on entre l'expression @1/@2, qui désigne ici CD/OM (fig5).

On valide cette saisie et on renomme cette expression en `CD/OM=`, avant de placer ce champ numérique (qui vaut 2) où on veut par rapport à la figure (fig6).

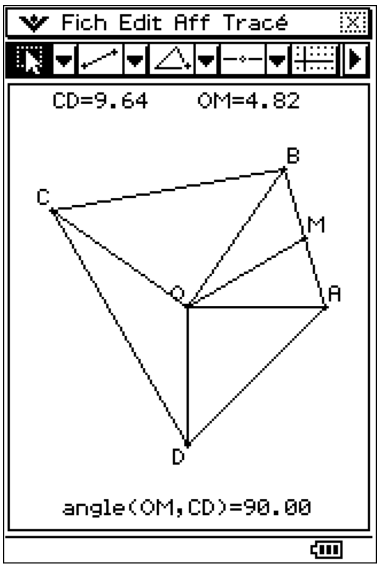

fig4 : les longueurs OM, CD et l'angle $(\widehat{OM, CD})$

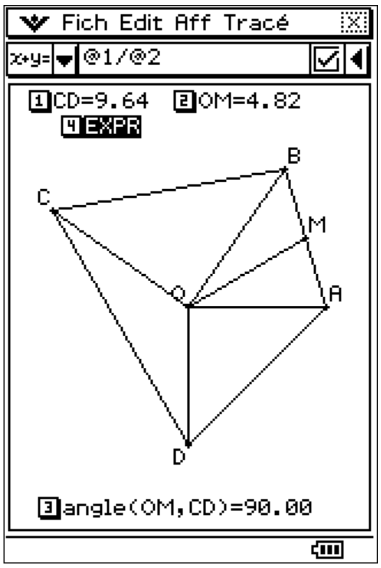

fig5 : le calcul du quotient CD/OM

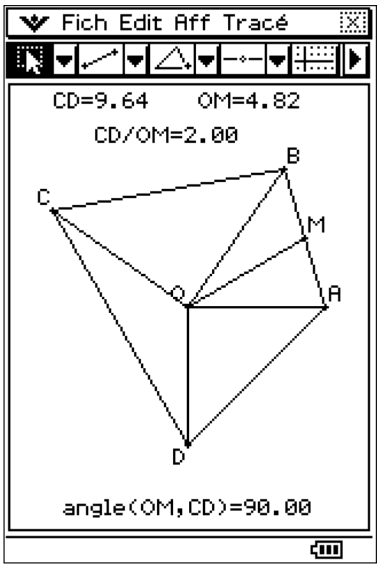

fig6 : la figure tous calculs faits

2. Sur la figure telle qu'elle a été tracée, on constate que les droites (OM) et (CD) sont orthogonales et que $CD = 2OM$.

   Ce n'est pas un hasard, comme on s'en aperçoit en modifiant le triangle OAB.

   On voit ci-après trois versions de la même construction, obtenues en modifiant la position du point B (sélectionner ce point avec le stylet, relever le stylet, puis tirer cette sélection jusqu'à la nouvelle position de B).

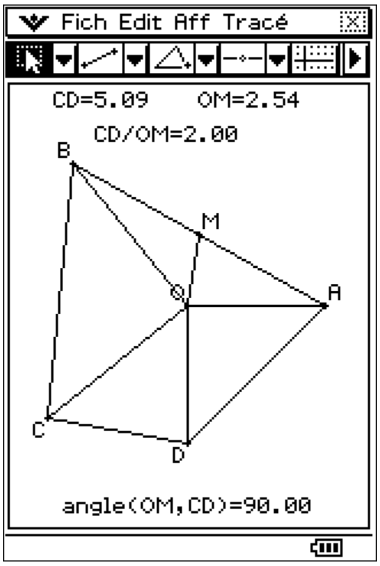

fig7

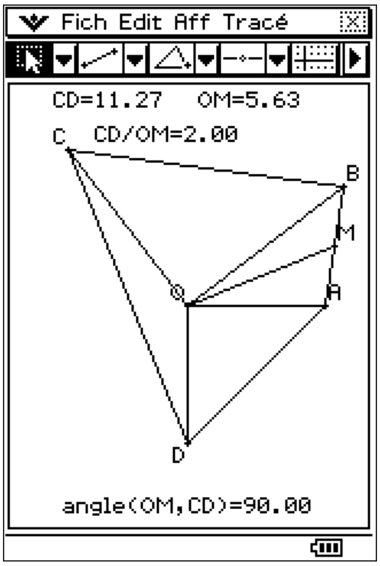

fig8

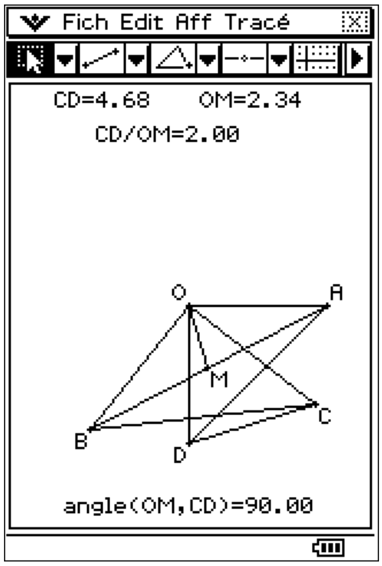

fig9

Trois versions différentes de la même configuration

Démonstrations

3. – *Avec les nombres complexes* :

   Soit O l'origine du plan complexe, et a, b, c, d, m les affixes de A, B, C, D, M.
   Le point D est l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $-\pi/2$.
   De même, le point C est l'image de B dans la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
   On a donc $d = -ia$ et $c = ib$, et il en résulte $c - d = i(a + b)$.
   Or $m = \dfrac{a+b}{2}$ donc $c - d = 2im$. On en déduit $\dfrac{DC}{OM} = 2$ et $(\widehat{OM, DC}) = \dfrac{\pi}{2}$.

   – *Avec les transformations* :

   Soit M' le point défini par $\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM}$.
   Le quadrilatère $OAM'B$ est un parallélogramme.
   Soit A' le symétrique de A par rapport à O.
   On a $\overrightarrow{A'O} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BM'}$.
   Ainsi $OM'BA'$ est un parallélogramme.
   Soit r la rotation de centre 0 et d'angle $\pi/2$.
   On a $r(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$ et $r(\overrightarrow{OA'}) = \overrightarrow{OD}$.
   Il en résulte $r(\overrightarrow{A'B}) = \overrightarrow{DC}$.
   Ainsi $\overrightarrow{DC} = r(\overrightarrow{A'B}) = r(\overrightarrow{OM'}) = 2r(\overrightarrow{OM})$.
   On retrouve bien l'orthogonalité de (OM) et (CD),
   ainsi que l'égalité $CD = 2OM$ (fig10)
   Remarque : on a créé M' puis A' avec (homothétie de centre O, de rapport 2 puis -1).

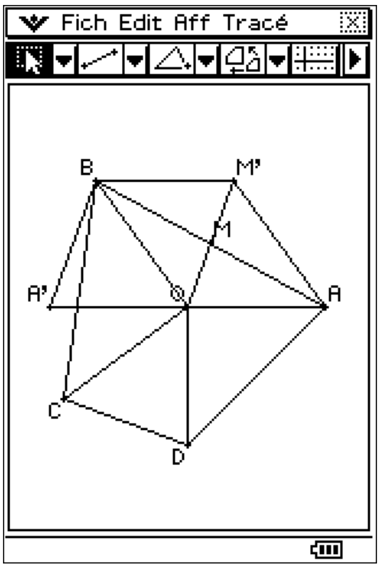

fig10