Courbes et équations

Énoncé

Soit m un réel. On cherche à déterminer le nombre de solutions réelles dans l'intervalle $[-5, 5]$ de l'équation :

$$-x^2 + 2x - 1 + me^{-x} = 0 \qquad (E)$$

1. Dans cette question on pose $m = 2$.
   À l'aide d'un grapheur (logiciel ou calculatrice), donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de l'unique solution de (E).

   Appeler l'examinateur pour validation du résultat et de la méthode employée.

2. Soit f la fonction définie sur $[-5; 5]$ par : $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$.
   À l'aide d'un grapheur, tracer la courbe représentative de f et émettre une conjecture quant au nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans l'intervalle $[-5, 5]$, en fonction des valeurs de m.

   Appeler l'examinateur pour validation de la conjecture.

3. Démontrer que, pour tout m, l'équation (E) et l'équation $f(x) = m$ ont le même ensemble de solutions dans l'intervalle $[-5, 5]$.

4. Répondre au problème posé.

Production demandée

– Présentation de la méthode de résolution utilisée en 1. et graphique correspondant ;

– Représentation graphique et énoncé de la conjecture pour la question 2 ;

– Réponses argumentées aux questions 3 et 4.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. On ouvre l'application Graphe&Ta… depuis l'écran d'accueil du Classpad.

   On efface les définitions éventuelles de fonctions par « `Edit/Tout effacer` ».

   On revient à la fenêtre d'affichage standard par puis Défaut.

   Dans le champ `y1`, on entre l'expression $-x^2 + 2x - 1 + 2\mathrm{e}^{-x}$ et on valide (vérifier que la case devant `y1` est cochée).

   Un appui sur trace la courbe représentative (fig1).

   Le tracé fait clairement apparaître l'unique solution dont parle l'énoncé.

   On peut maximiser la fenêtre de tracé par un appui du stylet sur `Resize`.

   La fonction `Analyse/Tracé` (ou , accessible après) permet de parcourir la courbe pas à pas, par des appuis répétés sur la touche de déplacement horizontal.

   Le fait d'avoir sélectionné les valeurs par défaut pour la fenêtre d'affichage (en particulier un intervalle $[-7.7, 7.7]$ en abscisse) fait que les déplacements horizontaux s'effectuent avec un incrément de 0.1 (l'écran est large de 155 pixels). Sur l'exemple (fig2), le réticule qui suit la courbe est situé au point d'abscisse -1.9.

   On voit ainsi que l'unique solution est comprise entre 1.6 et 1.7 (cf fig3 et fig4).

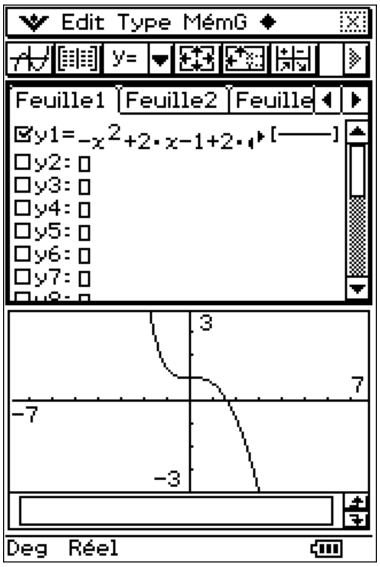

fig1 : définition et tracé

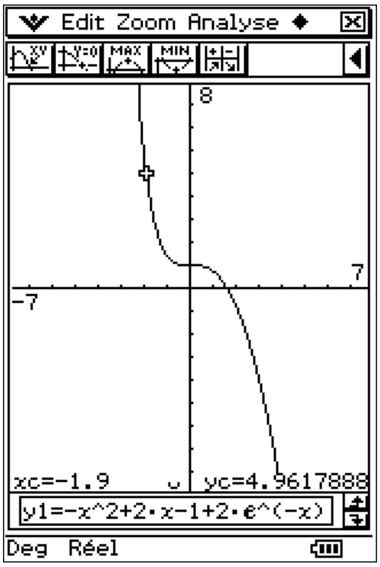

fig2 : pour $x = -1.9$

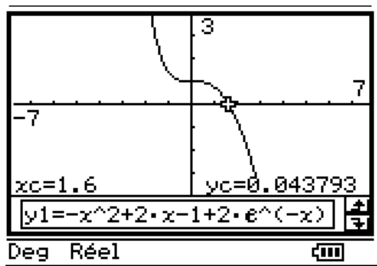

fig3 : pour $x = 1.6$

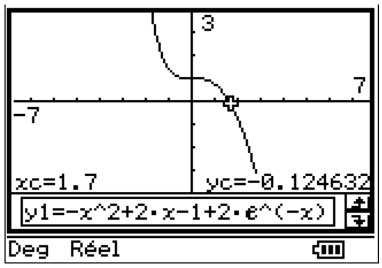

fig4 : pour $x = 1.7$

Il est évidemment très facile de demander au Classpad de nous donner une bien meilleure valeur approchée de la solution x_0 de l'équation.

Il suffit pour cela de toucher l'icône avec le stylet.

Le réticule vient alors se placer au point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

On trouve $x_0 \approx 1.6269438$ (fig5).

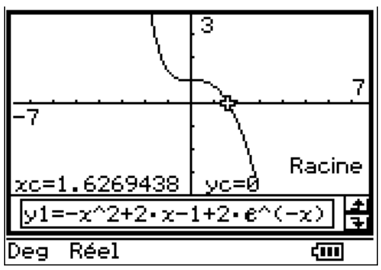

fig5 : la solution x_0

2. Dans l'éditeur de fonctions, on entre $(x^2 - 2x + 1)e^x$ dans `y2` (on pourrait remplacer le contenu de `y1`). On vérifie que la case `y2` est cochée et on décoche la case `y1`.

   Après un appui sur , on choisit $[-5, 5]$ comme intervalle des abscisses (on conserve l'intervalle des ordonnées utilisé dans le tracé précédent).

   On trace la courbe représentative par un appui sur (fig6).

   On peut maximiser la fenêtre de tracé, et l'allure générale du graphe incite à resserrer un peu l'intervalle en ordonnée. On a choisi ici l'intervalle $[-0.5, 2]$ (fig7).

   Il apparaît clairement que l'application f (pour nous c'est `y2`) présente un maximum relatif en un point d'abscisse négative. Un simple appui du stylet sur l'icône et le réticule est automatiquement placé sur le point représentatif de ce maximum local, d'abscisse $x = -1$ et d'ordonnée $f(-1) = 4e^{-1} \approx 1.4715177$ (fig8).

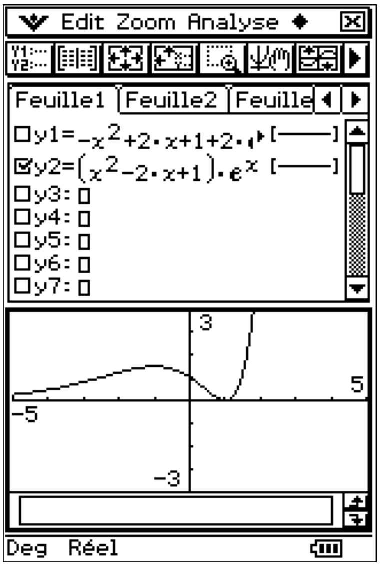

fig6 : tracé de f

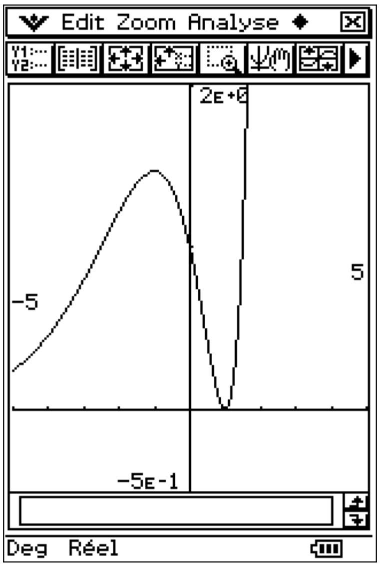

fig7 : nouveau cadrage

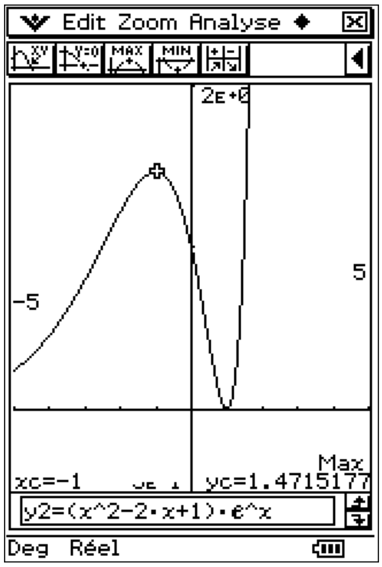

fig8 : maximum local

Pour conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans l'intervalle $[-5, 5]$, on va tracer la droite $y = m$ (pour différentes valeurs de m). Pour cela, on va utiliser la notion de "Graphe dynamique".

Dans l'éditeur de fonctions, on entre l'expression `y3=m`. On peut même choisir un style de tracé ("cliquer" sur le style par défaut pour ouvrir une liste). Ici nous choisissons un affichage en pointillés gras (fig9). On choisit ensuite la fonction « ♦`Graph dynamique` » (fig10), puis on désigne m comme premier paramètre (le second est inutile ici) et on le fait varier de $m = 0$ à $m = 2$ avec un pas de 0.1 (fig11).

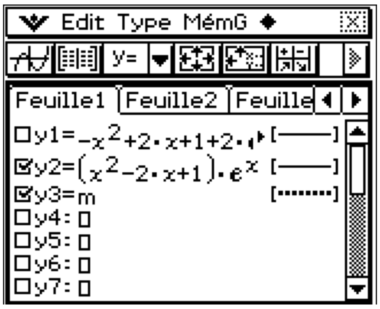

fig9 : on ajoute $y = m$

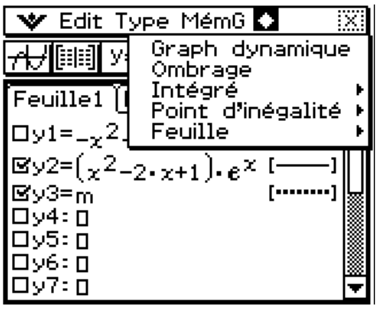

fig10 : `Graph dynamique`

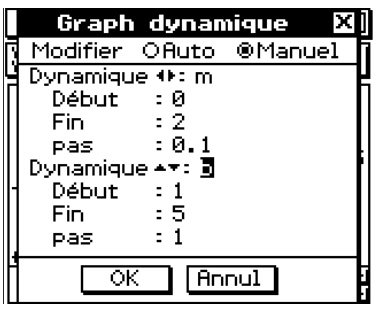

fig11 : variations de m

Dès qu'on valide les variations de m, on revient à l'écran de tracé, avec la courbe de f et la droite $y = m$ (pour la première valeur de m c'est-à-dire $m = 0$).

L'écran affiche l'indication `Modifier` car nous sommes en mode `Graphe dynamique`. Des appuis répétés sur la touche de déplacement horizontal affichent alors la droite $y = m$ pour chacune des valeurs possibles du paramètre m (fig12 à fig14).

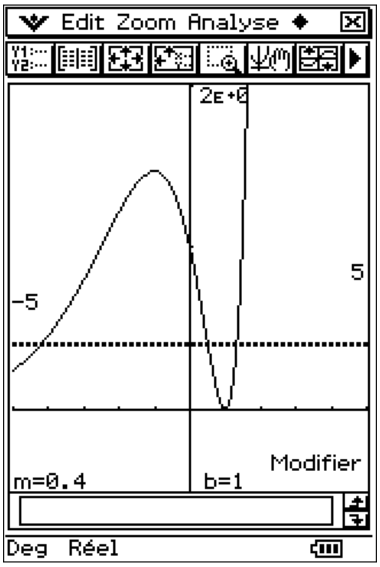

fig12 : pour $m = 0.4$

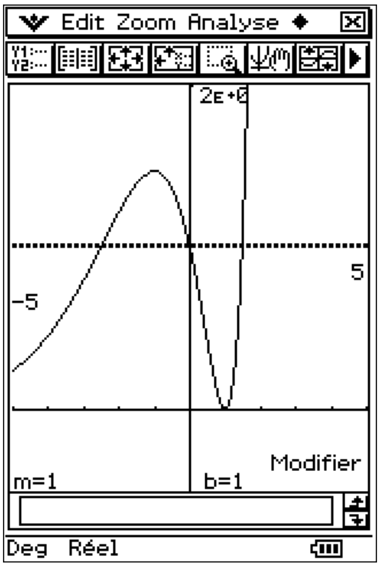

fig13 : pour $m = 1$

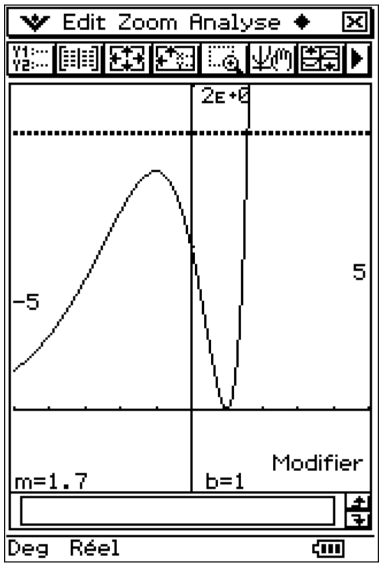

fig14 : pour $m = 1.7$

Tracé de la courbe $y = f(x)$ et de la droite $y = m$ pour trois valeurs de m

Pour un m donné, on trouve facilement une valeur approchée des solutions de $f(x) = m$.

Il suffit de sélectionner « `Analyse/Solveur Graphique/Intersection` » : le réticule se place alors sur un point d'intersection, et l'écran affiche l'indication `Intersection` : des appuis sur la touche de déplacement passent aux autres points d'intersection éventuels. On a par exemple trouvé trois solutions pour $m = 1.3$ (fig15 à fig17).

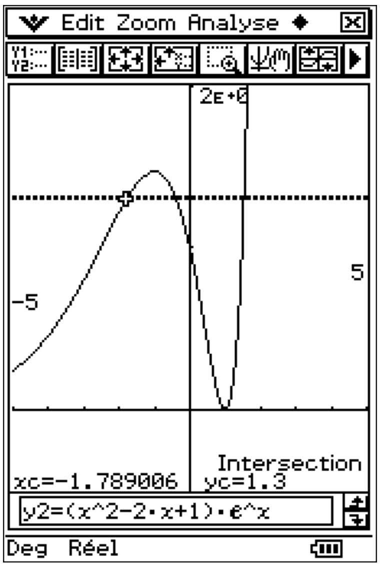

fig15 : $x_1 \approx -1.789$

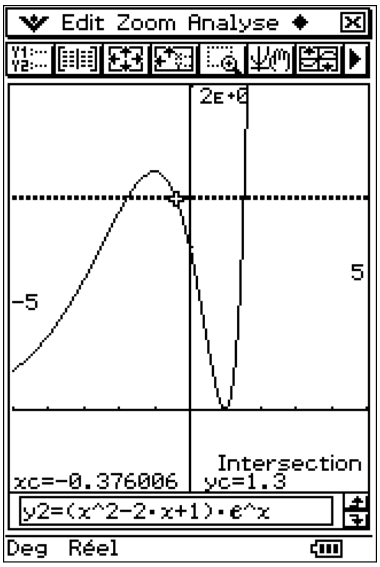

fig16 : $x_2 \approx -0.376$

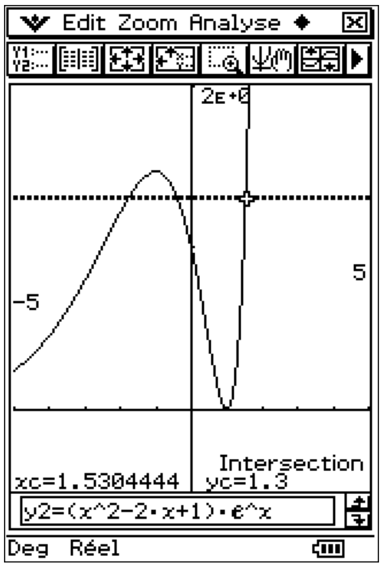

fig17 : $x_3 \approx 1.530$

Les trois solutions de l'équation $f(x) = m$ quand $m = 1.3$

L'énoncé demande de se limiter à des solutions x dans l'intervalle $[-5, 5]$.

Avec `Analyse/Tracé` (icône), on trouve $f(-5) \approx 0.242566$ et $f(5) \approx 2374.6105$.

De ce qui précède, on en tire les impressions (pour ne pas dire conclusions) suivantes :

- Si $m < 0$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution : c'est d'ailleurs parfaitement évident quand on remarque que $f(x) = (x-1)^2 \mathrm{e}^x$.
- Si $m = 0$, il n'y a que la solution $x = 1$: l'écriture $f(x) = (x-1)^2 \mathrm{e}^x$ rend ça très clair.
- Si $0 < m < f(-5) \approx 0.242566$, il y a deux solutions distinctes dans $[-5, 5]$.
- Si $f(-5) \leqslant m < 4\mathrm{e}^{-1} \approx 1.4715177$, il y a trois solutions distinctes dans $[-5, 5]$.
- Si $m = 4\mathrm{e}^{-1} \approx 1.4715177$, il y a deux solutions distinctes (dont $x = -1$).
- Si $4\mathrm{e}^{-1} < m \leqslant f(5) \approx 2374.6105$, il y a une seule solution dans $[-5, 5]$.
- Si $m > f(5)$, il n'y a pas de solution dans $[-5, 5]$.

Remarque : on a ici utilisé une méthode purement graphique pour étudier le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Il était possible de passer par l'application ax=b RésolNum, qui est dédiée aux résolutions numériques d'équations.

On entre dans cette application, depuis l'écran d'accueil, par un appui sur ax=b RésolNum.

On entre alors l'équation $(x^2 - 2x + 1)\mathrm{e}^x = m$. Le Classpad identifie immédiatement les deux variables présentes, x et m (il affiche la valeur éventuelle de m).

On peut alors préciser une valeur de m et décider de l'intervalle en x sur lequel on va résoudre l'équation. On décide de se placer ici sur le segment $[-5, 5]$. C'est par rapport à la variable dont le nom est coché que va se faire la résolution (fig18).

Un appui sur Solve affiche alors une solution de l'équation, ici $x \approx -0.376$ (fig19). Le message `Gauche-Droit=0` signifie qu'on a réellement trouvé une solution de l'équation (pour cette valeur de x, les membres gauche et droit de l'équation sont égaux).

Pour trouver les deux autres solutions (pour cette valeur particulière de m), il faut indiquer un autre intervalle en x (par exemple $[-2, -1]$ ou $[1, 2]$). On voit (fig18 à 21) les résultats obtenus dans l'application ax=b RésolNum. Il faut bien reconnaître que c'est un peu moins pratique (en tout cas moins visuel) que dans l'application Graphe&Ta....

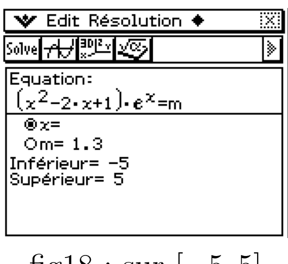

fig18 : sur $[-5, 5]$

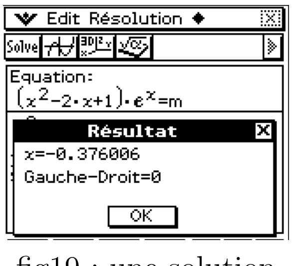

fig19 : une solution

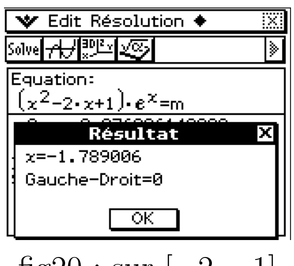

fig20 : sur $[-2, -1]$

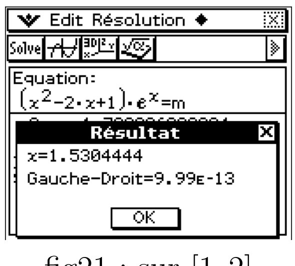

fig21 : sur $[1, 2]$

On peut enfin résoudre $f(x) = m$, de façon approchée, dans l'application Principale.

On commence pour cela par poser `Define f(x)=(x-1)^2*e^(-x)`.

On évalue alors, par exemple, l'expression `solve(f(x)=1.3,x,0)` pour obtenir la solution (dans le cas $m = 1.3$) la plus proche de $x = 0$.

Il suffit d'évaluer `solve(f(x)=1.3,x,-2)` et `solve(f(x)=1.3,x,2)` pour obtenir les deux autres solutions approchées quand $m = 1.3$.

3. De façon évidente, pour tout x réel, et en particulier pour tout x de $[-5,5]$:

   $(E) : -x^2+2x-1+m\mathrm{e}^{-x} = 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = m\mathrm{e}^{-x} \Leftrightarrow (x^2-2x+1)\mathrm{e}^x = m \Leftrightarrow f(x) = m$

   Pour tout m, l'équation (E) et l'équation $f(x) = m$ ont le même ensemble de solutions dans l'intervalle $[-5,5]$.

4. Pour résoudre l'équation $f(x) = m$, on dresse le tableau des variations de f.

   Pour tout réel x, $f(x) = (x-1)^2\mathrm{e}^x$ donc $f'(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^x + (x-1)^2\mathrm{e}^x = (x-1)(x+1)\mathrm{e}^x$.

   L'application f' s'annule en même temps (et a le même signe) que x^2-1.

   On en déduit que f est strictement croissante sur $[-5,-1]$ et sur $[1,5]$, et qu'elle est strictement décroissante sur $[-1,1]$.

   L'application f réalise donc une :

   – Une bijection de $I_1 = [-5,-1]$ sur $J_1 = [f(-5), f(-1)]$, où $\begin{cases} f(-5) = 36\mathrm{e}^{-5} \approx 0.24257 \\ f(-1) = 4\mathrm{e}^{-1} \approx 1.47152 \end{cases}$

   – Une bijection de $I_2 =]-1,1[$ sur $J_2 =]f(-1), f(1)[$.

   – Une bijection de $I_3 = [1,5]$ sur $J_3 = [f(1), f(5)]$, où $\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(5) = 16\mathrm{e}^5 \approx 2374.61 \end{cases}$

   Pour chaque valeur de m, l'équation $f(x) = m$ possède donc autant de solutions qu'il y a d'intervalles J_k auxquels appartient m.

   Puisque $f(1) < f(-5) < f(-1) < f(5)$ on retrouve les résultats énoncés à la question 2.

   – Si $m < f(1)$, ou si $m > f(5)$, pas de solution sur $[-5,5]$.

   – Si $f(1) < m < f(-5)$ une solution sur $]-1,1[$, une autre sur $]1,5[$.

   – Si $f(-5) < m < f(-1)$, trois solutions distinctes (une sur chaque I_k).

   – Si $f(-1) < m < f(5)$, une seule solution (elle appartient à $]1,5[$).

   – Pour les cas $m = f(1)$, $m = f(-5)$, $m = f(-1)$, $m = f(5)$, tout a déjà été dit...

   Terminons en évoquant la possibilité de dresser un tableau de variations dans Graphe&Ta... .

   Il suffit de sélectionner une fonction dans l'éditeur et de toucher l'icône.

   Si on veut en plus faire appraître le signe de f'' (et les points d'inflexion éventuels), on va dans l'onglet `Spécial` du menu « `/Format Graphique` ».

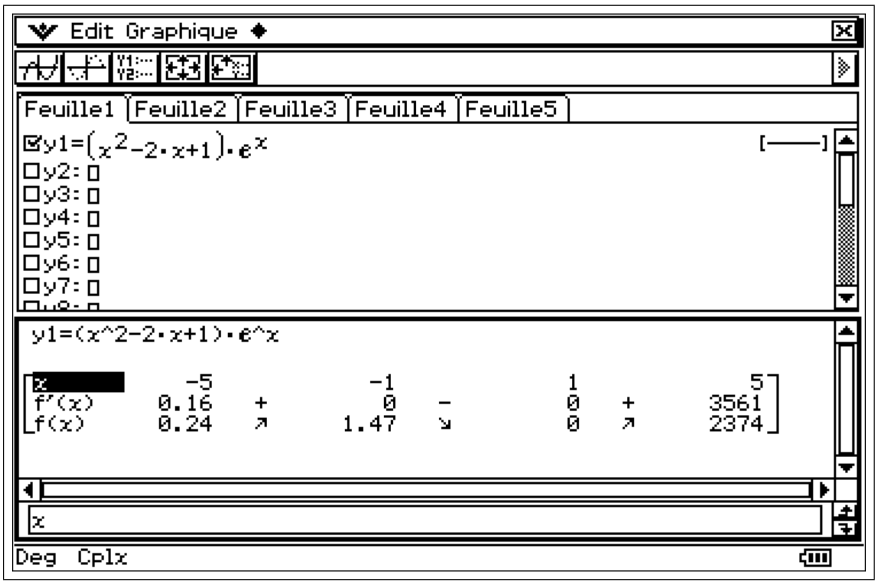

fig22 : le tableau de variations de l'application f