

Optimisation dans l'espace

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0, 6, 0)$, $B(0, 0, 8)$, $C(10, 0, 8)$. M est un point appartenant au segment $[OB]$. Le plan (Π) passant par M et orthogonal à la droite (OB) coupe la droite (AC) en P .

Partie expérimentale

1. En utilisant un logiciel de géométrie, construire une figure traduisant l'énoncé.

Appeler l'examineur pour la vérification de la construction.

2. On note respectivement N et Q les points d'intersection du plan (Π) avec les droites (OC) et (AB) et l'on admet que le quadrilatère $MNPQ$ est un rectangle. En déplaçant le point M , émettre une conjecture quant à la position de ce point rendant maximale l'aire du rectangle.

Appeler l'examineur pour valider la conjecture.

Partie démonstration

On note $z = OM$.

3. Exprimer en fonction de z les longueurs MN et MQ .
4. Démontrer la conjecture émise en 2.

Production demandée


- La figure réalisée avec le logiciel ;
- Les démonstrations demandées dans les questions 3 et 4.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. Résolution avec le calcul formel

Le Classpad, comme les autres calculatrices à ce jour, ne dispose pas d'un module de géométrie dynamique dans l'espace.

Nous allons donc explorer ici d'autres possibilités pour résoudre cet exercice, et tout d'abord l'environnement de calcul formel.

On ouvre l'application . On commence par effacer le contenu actuel de la fenêtre par « Edit/Tout effacer ». La première instruction `Clear_a_z` permet de supprimer toutes les variables (dans le répertoire en cours) dont le nom se réduit à une seule lettre.

L'instruction `Clear_a_z` se trouve par exemple dans le menu « Action/Commande ».

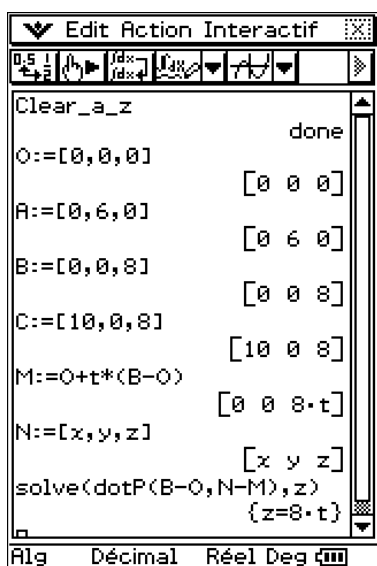
Les points A, B, C sont représentés ici par les variables homonymes, sous la forme de vecteurs de longueur 3. On a également défini le point $O = [0, 0, 0]$, bien que ce ne soit pas vraiment nécessaire (fig1).

On définit M sous la forme $M = O + t\overline{OB}$, c'est-à-dire $M = O + t(B - O) = [0, 0, 8t]$.

On considère ici que t est un réel compris entre 0 et 1, de manière à ce que M soit un point quelconque du segment $[OB]$. On aurait très bien pu se contenter d'écrire $M = t * B$ (c'est ce qu'il aurait fallu faire si on n'avait pas défini le point O).

Le plan (Π) passe par le point $M(0, 0, 8t)$ et il est orthogonal à $\overline{OB} = (0, 0, 8)$, c'est-à-dire orthogonal au vecteur "vertical" $(0, 0, 1)$. Il s'agit donc du plan "horizontal" passant par M , c'est-à-dire du plan d'équation $z = 8t$.

On peut retrouver ce résultat (assez évident, au demeurant) en introduisant un point quelconque $N(x, y, z)$ et en écrivant l'équation du plan (Π) sachant qu'il passe par M et qu'il est orthogonal à \overline{OB} . Il suffit pour cela d'écrire l'égalité $\overline{OB} \cdot \overline{MN} = 0$, avec la syntaxe du Classpad bien sûr (fig1) : on retrouve évidemment l'équation $z = 8t$.

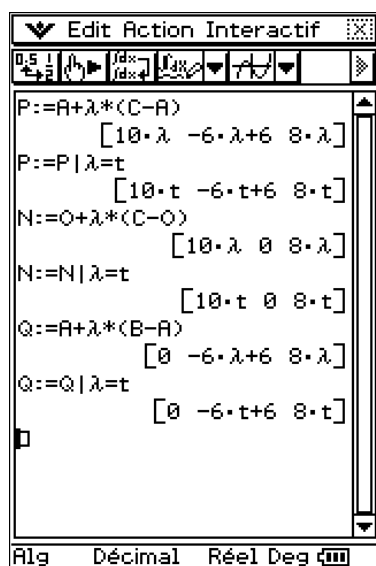


```

Edit Action Interactif
Clear_a_z done
O:=[0,0,0]
A:=[0,6,0]
B:=[0,0,8]
C:=[10,0,8]
M:=O+t*(B-O)
N:=[x,y,z]
solve(dotP(B-O,N-M),z)
{z=8*t}
Alg Décimal Réel Deg

```

fig1 : les points O, A, C, M et l'équation de (Π)

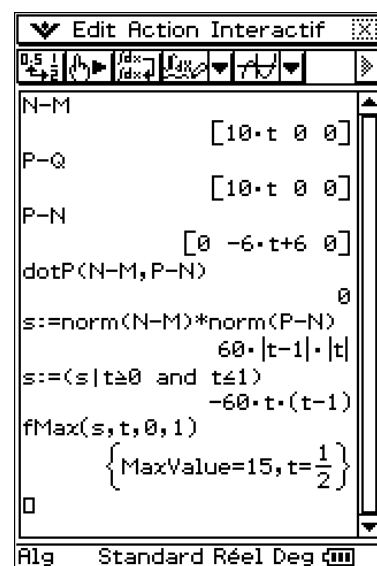


```

Edit Action Interactif
P:=A+lambda*(C-A)
[10*lambda -6*lambda+6 8*lambda]
P:=P|lambda=t
[10*t -6*t+6 8*t]
N:=O+lambda*(C-O)
[10*lambda 0 8*lambda]
N:=N|lambda=t
[10*t 0 8*t]
Q:=A+lambda*(B-A)
[0 -6*lambda+6 8*lambda]
Q:=Q|lambda=t
[0 -6*t+6 8*t]
Alg Décimal Réel Deg

```

fig2 : la définition et le calcul de P, N, Q



```

Edit Action Interactif
N-M [10*t 0 0]
P-Q [10*t 0 0]
P-N [0 -6*t+6 0]
dotP(N-M,P-N) 0
s:=norm(N-M)*norm(P-N)
60*|t-1|*|t|
s:=(s|t>=0 and t<=1)
-60*t*(t-1)
fMax(s,t,0,1)
{MaxValue=15,t=1/2}
Alg Standard Réel Deg

```

fig3 : le rectangle $MNPQ$ et son aire maximum

On va maintenant définir les points P, N, Q (voir les calculs fig2) :

– On introduit P comme un point quelconque de la droite (AC) .

On pose pour cela $P = A + \lambda \overrightarrow{AC}$, et on calcule λ pour que P appartienne à (Π) .

Puisque $P = (0, 6, 0) + \lambda(10, -6, 8) = (10\lambda, 6(1 - \lambda), 8\lambda)$, il faut poser $\lambda = t$.

– On introduit de même N comme un point de (OC) , donc $N = O + \overrightarrow{OC} = (10\lambda, 0, 8\lambda)$.

Là encore, c'est pour $\lambda = t$ que le point N appartient au plan (Π) .

– Enfin on introduit Q comme un point de (AB) , donc $Q = A + \overrightarrow{AB} = (0, 6(1 - \lambda), 8\lambda)$.

Là encore, c'est pour $\lambda = t$ que le point Q appartient au plan (Π) .

On va maintenant vérifier que $MNPQ$ est un rectangle, calculer son aire, et vérifier pour quelle position de M sur $[OB]$ (c'est-à-dire quel t de $[0, 1]$) cette aire est maximum.

On voit fig3 les calculs correspondant à cette démonstration dans l'application .

Rappelons que $\begin{cases} M = (0, 0, 8t) \\ N = (10t, 0, 8t) \end{cases}$ et $\begin{cases} P = (10t, 6(1 - t), 8t) \\ Q = (0, 6(1 - t), 8t) \end{cases}$

Ainsi $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} = (10t, 0, 0)$: le quadrilatère $MNPQ$ est donc un parallélogramme.

D'autre part $\overrightarrow{NP} = (0, 6(1 - t), 0)$ donc $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$.

Puisqu'il a un angle droit, le parallélogramme $MNPQ$ est un rectangle.

La surface de ce rectangle est $S(t) = MN \times NP$ avec $MN = 10t$ et $NP = 6(1 - t)$.

On en déduit $S(t) = 60t(1 - t) = 60(t - t^2)$.

L'application S , de dérivée $S'(t) = 60(1 - 2t)$ est maximum sur $[-1, 1]$ quand $t = \frac{1}{2}$.

Ce maximum (atteint quand M est le milieu de $[OM]$) vaut $S\left(\frac{1}{2}\right) = 15$.

On voit fig3 les instructions du Classpad qui ont été utilisées dans ces calculs :

– La fonction `dotP` (“dot product”) calcule le produit scalaire de deux vecteurs.

– La fonction `norm` calcule la norme euclidienne d'un vecteur.

– L'instruction `s:=(s|t>=0 and t<=1)` utilise l'opérateur `|` (“sachant que”).

Elle a pour effet de spécifier que t est dans $[0, 1]$ et donc d'ôter les valeurs absolues.

– La fonction `fMax` calcule le maximum d'une expression, relativement à une variable, sur un intervalle donné. Comme on le voit, elle renvoie une liste de deux éléments : d'abord la valeur maximum, puis celle de la variable pour laquelle ce maximum est atteint.

Remarque 1 : par rapport à l'énoncé, on a utilisé t (variant dans $[0, 1]$) plutôt que z (dans $[0, 8]$). Les deux paramètres sont évidemment reliés par l'égalité $z = 8t$.

Remarque 2 : si on calcule le périmètre $L(t)$ du rectangle $MNPQ$, on trouve :

$$L(t) = 2(MN + NP) = 2(10t + 6(1 - t)) = 4(2t + 3)$$

Contrairement à l'aire $S(t)$, le périmètre $L(t)$ est donc une fonction croissante de t .

Ce périmètre est donc maximum quand $t = 1$, c'est-à-dire quand M est en B .

Dans ce cas $\begin{cases} M = Q = (0, 0, 8) \\ N = P(10, 0, 8) \end{cases}$ (le “rectangle” $MNPQ$ se réduit à $[MN]$)

Lorsque le périmètre de $MNPQ$ est maximum, son aire est donc minimum !

2. Avec de la géométrie tout de même

On va quand même construire une figure représentant les variations du rectangle $MNPQ$.


Pour cela, et pour donner l'illusion d'une figure en 3D, on va utiliser une perspective cavalière, avec un angle de fuite de 30° et un coefficient de réduction (pour les fuyantes, c'est-à-dire ici les parallèles à l'axe $y'Oy$) de $3/4$ (ce sont des valeurs classiques).

Sans rentrer dans les détails, cela signifie qu'un point $N(x, y, z)$ de l'espace va maintenant être représenté par un point $N(X, Y)$ du plan, avec : $X = x + ky \cos \theta$ et $Y = z + ky \sin \theta$

$$\text{donc } X = x + \frac{3y\sqrt{3}}{8} \text{ et } Y = z + \frac{3y}{8}.$$

Voici une méthode possible (et finalement commode) pour aboutir à la construction finale. Evidemment, avec cette méthode, on s'échappe définitivement de l'exercice tel qu'il était proposé. Mais ce sera une bonne occasion de voir comment, même avec une calculatrice, on peut faire de la géométrie en 3D.

(a) Création des points de base O, A, B, C

On entre dans l'application , et on fait place nette par « Edit/Tout effacer ».

On définit f par : Define $f(x, y, z) = [x + 3y\sqrt{3}/8, z + 3y/8]$.

On calcule alors $O = f(0, 0, 0)$, $A = f(0, 6, 0)$, $B = f(0, 0, 8)$ et $C = f(10, 0, 8)$.

On obtient ainsi les couples de coordonnées qui vont représenter ces points sur la figure en perspective. On crée également un point $X = f(11, 0, 0)$ dont le seul rôle sera de nous aider à tracer l'axe des abscisses (fig1).

Remarque : les noms donnés ici aux variables sont sans grande importance, mais très utiles pour que l'utilisateur sache à quel point il a affaire.

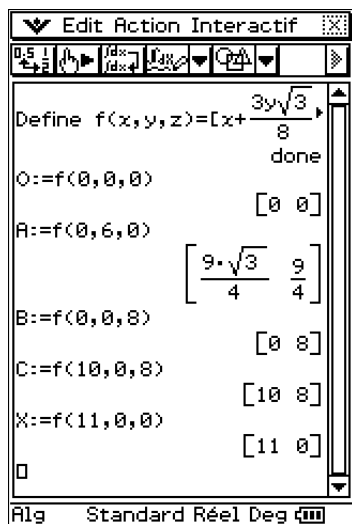


fig4 : définition des points O, A, B, C, X

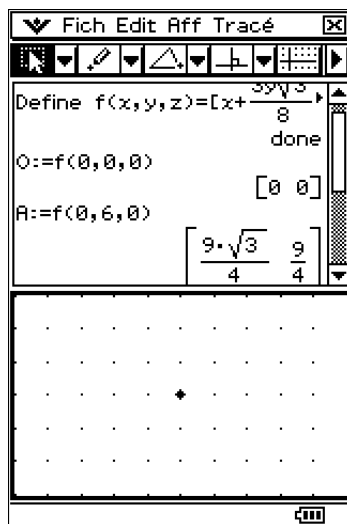


fig5 : Copier $[0, 0]$ dans la fenêtre de géométrie

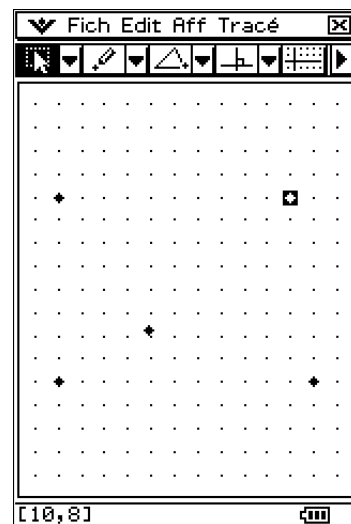




fig6 : les cinq points copiés sur la figure

Depuis l'écran d'accueil de l'application principale, on ouvre une session de géométrie (utiliser l'icône  dans la liste ouverte par .


On nettoie aussi l'écran de géométrie par « Fich/Nouveau ». On fait apparaître la grille des points à coordonnées entières avec « Aff/Grille entier ».

Nous allons maintenant littéralement copier les points de l'application principale vers l'application géométrie (qui occupe pour l'instant la moitié inférieure de l'écran).



Commençons par le point O , représenté ici par le vecteur $[0, 0]$.

- Dans l'application principale, on touche $[0, 0]$ avec le stylet, avant de le relever : cela a pour effet de sélectionner ce vecteur (il passe en vidéo inverse).
- On repose alors le stylet sur cette sélection, et on tire cette sélection à la surface de l'écran, jusqu'à se trouver au-dessus de la fenêtre de géométrie. À ce moment c'est tout l'écran de géométrie qui doit passer en vidéo-inverse.
- On relève alors le stylet. Cela a pour effet de mettre fin à la sélection de l'écran de géométrie et de créer un point dont les coordonnées sont $(0, 0)$. Ce point apparaît dessiné sous la forme d'un petit carré noir (fig5).

On procède de même avec A, B, C et X . Reproduisez bien la procédure précédente pour chaque point, et ne vous inquiétez pas si vous ne voyez pas les points créés à partir des couples B, C, X : c'est normal car ils sont hors-écran pour l'instant.

On maximise la fenêtre géométrie par **Resize** et on sélectionne « Aff/Zoom plein écran » (ou l'icône ) pour cadrer l'écran au mieux des données.

Cette fois, les cinq points copiés doivent clairement apparaître. On peut en sélectionner un (ici on a mis en évidence le point $[10, 8]$) pour en vérifier les coordonnées (fig6).

Pour que les choses soient bien claires, on donne à chaque point le nom qui lui convient (il n'est peut-être pas nécessaire de nommer X). Pour cela, on sélectionne un point, puis  donne accès au nom représenté par  (fig7).

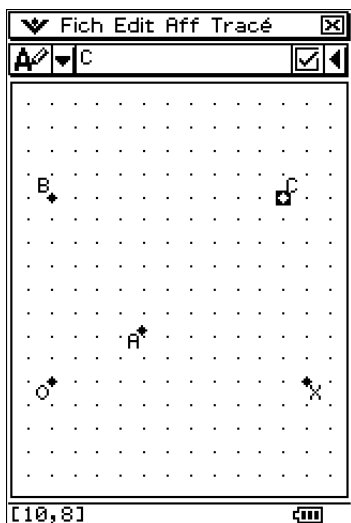


fig7 : on a nommé les points O, A, B, C, X

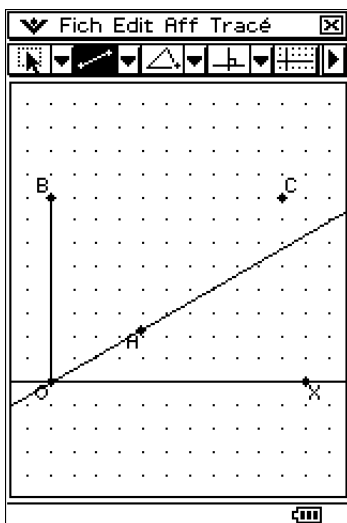


fig8 : on a tracé les axes de coordonnées

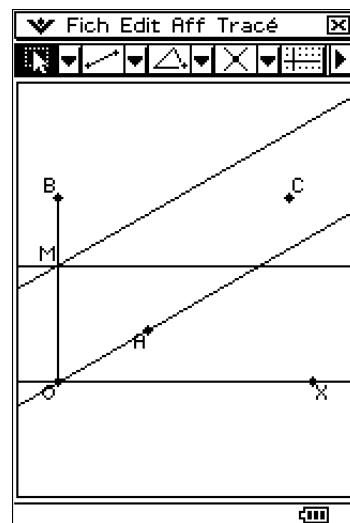






fig9 : on a placé M et représenté le plan (Π)

(b) *Les axes de coordonnées, le point M et le plan (Π)*

Avec les icônes  et , on trace les droites OX (c'est l'axe $x'Ox$) et OY (c'est l'axe $y'Oy$) et le segment vertical OB qui représentera l'axe $z'Oz$ (fig8).

Avec l'icône , on crée un point sur $[OB]$, qu'on renomme en M .

À ce stade, on peut enlever la grille des points entiers.

Il nous reste à représenter le plan horizontal (Π) passant par M . Pour cela on trace les parallèles à OX et à OY passant par M (fig9 : sélectionner une droite et le point M puis l'icône )

Dans la suite, nous appellerons Mx et My les deux droites obtenues.

(c) Placer les points P, Q et N

Le moins évident à placer est P , à l'intersection du plan (Π) et de la droite (AC) .

L'idée consiste à imaginer le plan vertical (Π') contenant (AC) et à former la droite d'intersection Δ des deux plans (Π) et (Π') .

Le point P est alors à l'intersection des deux droites Δ' et (AC) .

Le plan Π' coupe le plan (Oyz) suivant la parallèle à Oz passant par A . De même il coupe le plan (Oxz) suivant la parallèle à Oz passant par C .

On trace ces deux parallèles (sélectionner OB puis A ou C , puis $\square \pm$).

On forme ensuite (avec $\square \times$) l'intersection de la première parallèle (passant par A) avec My , et l'intersection de la seconde avec Mx .

On voit le résultat fig10 : on a renommé u et v ces deux points pour qu'ils soient reconnaissables sur la copie d'écran, et on a tracé le segment $[uv]$.

La droite (uv) est l'intersection du plan horizontal (Π) et du plan vertical (Π') .

Le point P se trouve donc à l'intersection des droites (uv) et (AC) .

On trace $[AC]$ puis on forme le point $[AC] \cap [uv]$, qu'on renomme en P (fig11).

Avec « Edit/Propriétés/Caché » on cache ce qui n'est plus utile (fig12).

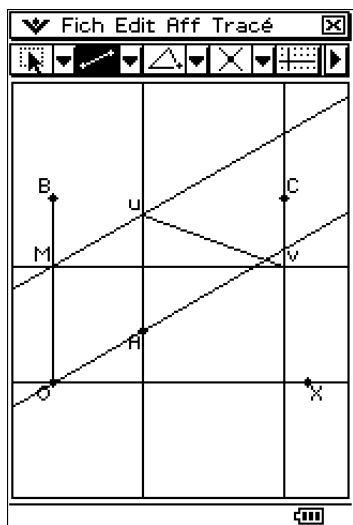


fig10 : $(\Pi') // Oz$ contenant (OA) ; $(\Pi') \cap (\Pi) = (uv)$

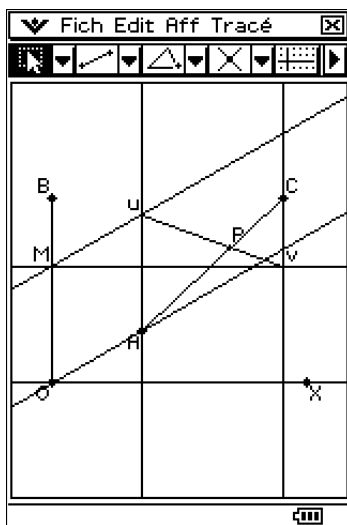


fig11 : construction de P dans le plan (Π')

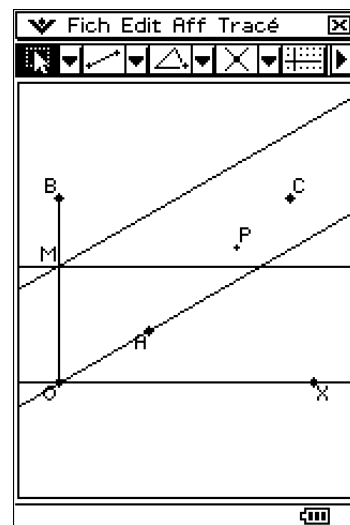


fig12 : Le point P est construit

$N = (\Pi) \cap (OC)$ est, dans le plan (Oxz) , à l'intersection de (Mx) et de (OC) .

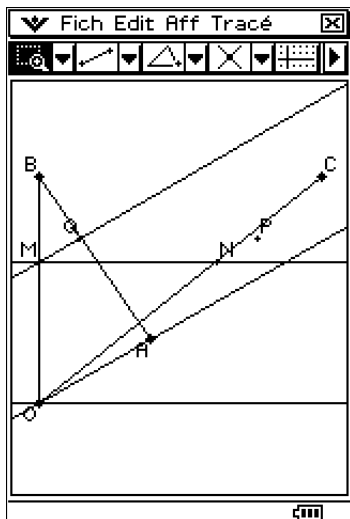
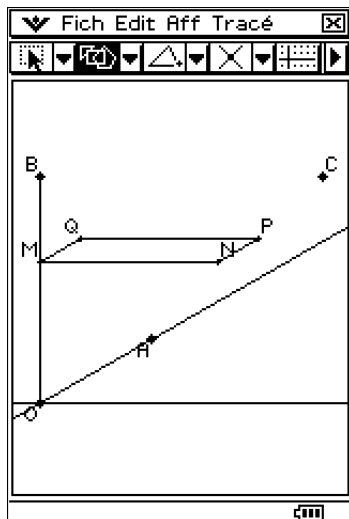
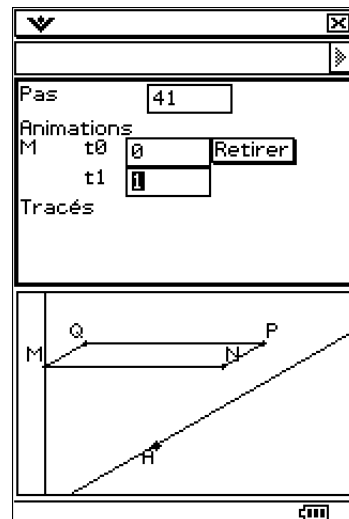
$Q = (\Pi) \cap (AB)$ est, dans le plan (Oyz) , à l'intersection de (My) et de (AB) .

On construit donc ces deux points avec l'outil $\square \times$ (fig13).

On cache ensuite les segments $[OC]$ et $[AB]$, et les droites Mx et My .

On trace le quadrilatère $MNPQ$ avec l'outil $\square \square$ (fig14).

Remarque : $MNPQ$ est bien un rectangle (dans l'espace) car, dans le plan horizontal (Π) , le segment $[PQ]$ est parallèle à $[MN]$ (donc à l'axe Ox), et le segment $[NP]$ est parallèle à $[MQ]$ (donc à l'axe Oy).

fig13 : construction des points N et Q fig14 : le quadrilatère $MNPQ$ fig15 : animation de M sur $[OB]$ en 41 étapes(d) Animer le point M , donc le rectangle $MNPQ$

On a va maintenant animer la figure, en demandant à M de parcourir $[OB]$.

Pour cela on sélectionne M et $[OB]$, puis « Edit/Animer/Ajouter animation ».

« Edit/Animer/Edit animations » permet de régler le nombre d'étapes (fig15 : choisir 41 étapes sur un segment de longueur 8 donne 40 intervalles de longueur 0.2).

On peut ensuite afficher le menu d'animation avec « Aff/Animation UI » et examiner le rectangle $MNPQ$ pour différentes positions de M sur $[OB]$ (fig16 à fig18).

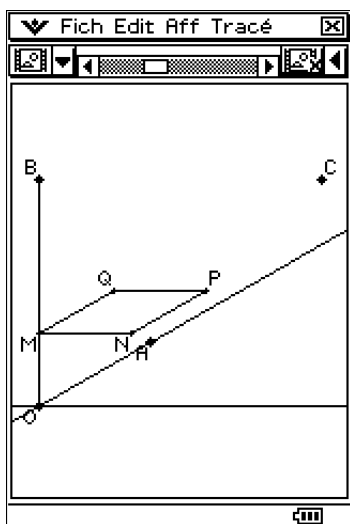


fig16

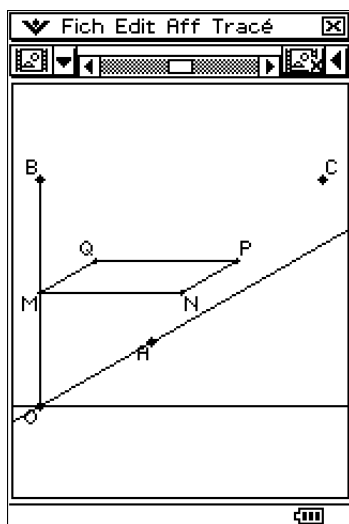


fig17

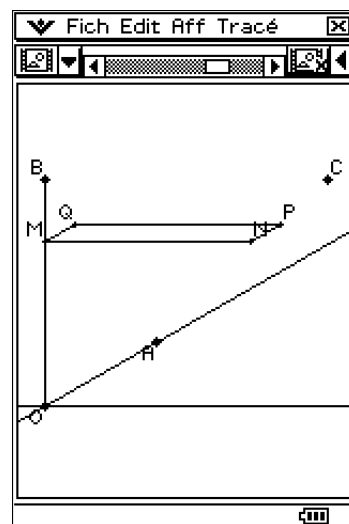





fig18

Trois étapes de l'animation du point M sur le segment $[OB]$

(e) Mesurer l'aire du rectangle $MNPQ$

On va mesurer l'aire \mathcal{A} du quadrilatère $MNPQ$, telle qu'elle apparaît dans la projection en perspective cavalière.

Pour calculer \mathcal{A} (et afficher ses différentes valeurs quand M parcourt $[OB]$), on sélectionne les quatre cotés du quadrilatère $MNPQ$, et  permet d'accéder à la valeur de l'aire du quadrilatère, dans le champ désigné par .

Il suffit de toucher l'icône  pour créer sur la figure un champ numérique donnant la valeur de cette aire pour la position courante de M sur $[OB]$.

On renomme ce champ en « Aire apparente: » (fig19).

Soit \mathcal{A}' l'aire réelle du rectangle $MNPQ$ dans l'espace.

La relation entre \mathcal{A}' et \mathcal{A} utilise l'angle de fuite (ici $\theta = 30^\circ$) et le coefficient de réduction suivant les fuyantes (ici $k = 3/4$). Cette relation est $\mathcal{A}' = k\mathcal{A} \sin(\theta)$.

On a donc $\mathcal{A}' = 3\mathcal{A}/8$, ou encore $\mathcal{A} = 8\mathcal{A}'/3$.

Pour calculer \mathcal{A} , on choisit « Tracé/Expression ». Dans le champ de saisie on entre l'expression $8@1/3$, où @1 désigne l'aire apparente (fig20). On valide, on renomme en « Aire réelle: » ce champ numérique, et on le place où on veut (fig21).

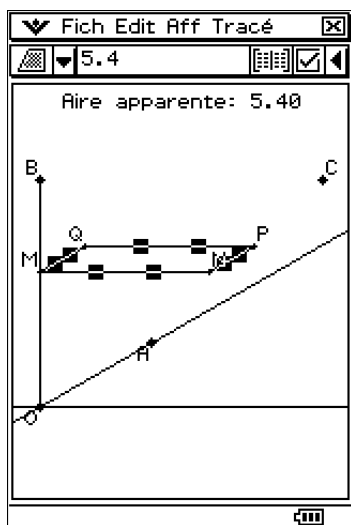


fig19 : l'aire apparente du rectangle $MNPQ$

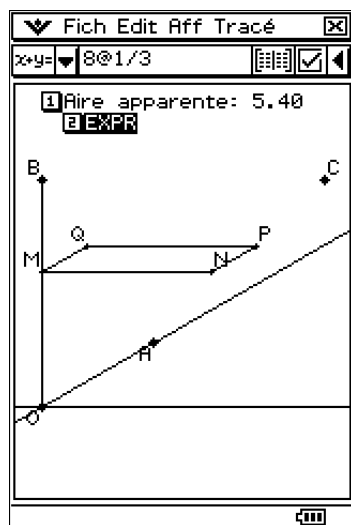


fig20 : calcul de l'aire réelle de $MNPQ$

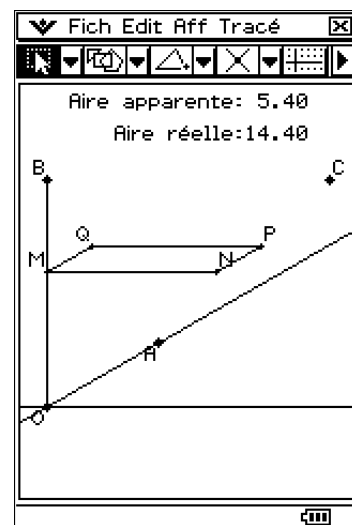


fig21 : affichage simultané des deux aires

On recommence l'animation et on constate que c'est quand M est à mi-parcours du segment (donc quand sa cote z_M vaut 4) que l'aire réelle de $MNPQ$ est maximum (égale à 15) ce qui confirme les résultats obtenus par le calcul formel.

On voit ci-dessous trois étapes de l'animation, pour $z_M = 2$, $z_M = 4$ et $z_M = 6$.

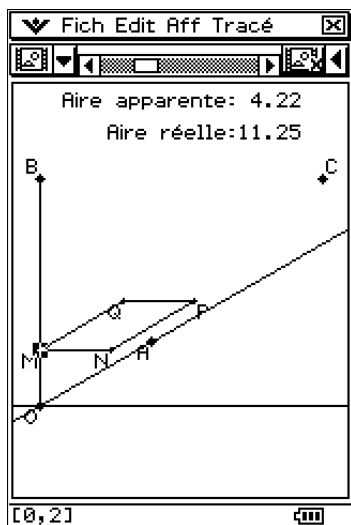


fig22 : pour $z_M = 2$

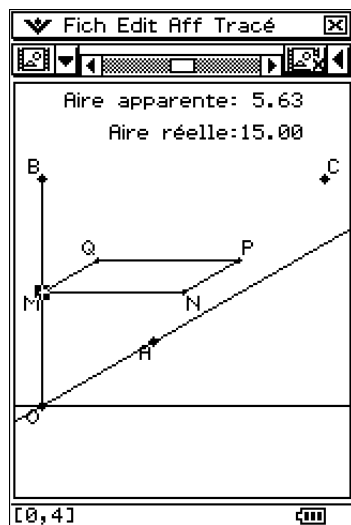


fig23 : pour $z_M = 4$

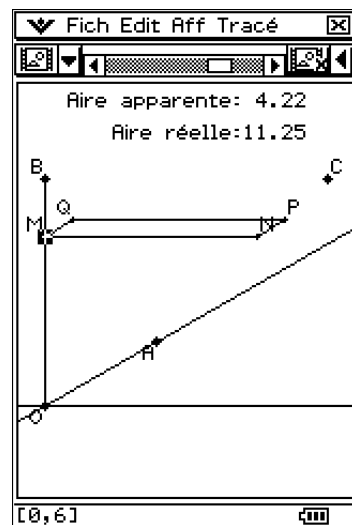


fig24 : pour $z_M = 6$

L'aire réelle de $MNPQ$ est maximum quand M est le milieu de $[OB]$