

## Comportement d'une suite récurrente

### Énoncé

Soit  $u_1$  un nombre réel fixé. On considère la suite récurrente  $u$  de premier terme  $u_1$  et telle que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$ .

1. En utilisant une calculatrice ou un tableur, calculer les premiers termes de cette suite et en réaliser une représentation graphique.

*Le choix du nombre de termes et de la valeur de  $u_1$  est laissé au candidat, qui en testera plusieurs, dont  $u_1 = -100$ .*

Appeler l'examineur pour vérifier les calculs faits.

2. En fonction des différentes valeurs de  $u_1$  :
  - (a) émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite  $u$  ;
  - (b) émettre une conjecture sur la limite de la suite  $u$ .

Appeler l'examineur pour valider les deux conjectures et indiquer la méthode prévue pour les démonstrations de la question (3).

3. Dans cette question on suppose que  $u_1 = -100$ .
  - (a) Démontrer qu'à partir d'un certain rang  $n_0$ , à préciser, la suite  $u$  est décroissante.
  - (b) Démontrer que la suite  $u$  est convergente et préciser sa limite.

### Production demandée

- Écrans montrant les calculs ayant permis d'émettre les deux conjectures.
- Démarches et réponses argumentées pour la question 3.


## Proposition de corrigé avec le Classpad

1.  $\diamond$  Dans l'application 

On ouvre cette application. On sélectionne Récurrence, puis « Edit/Tout effacer ».

On choisit le type «  $a_1$  Type  $a_{n+1}$  » dans le menu « Type ».

On entre la définition de la suite (qui s'écrira ici ( $a_n$ ) plutôt que ( $u_n$ )), et une valeur initiale, comme indiqué fig1 (utiliser le menu « n,  $a_n$  » pour faciliter la saisie de  $a_n$ ).

On définit la table des valeurs avec  (fig2 : ici on a choisi de calculer  $a_1, \dots, a_{30}$ ).

On affiche cette table avec , et on maximise la fenêtre avec Resize (fig3 et fig4).

Il faut aller dans «  $\nabla$  Format Graphique/Special » pour fixer le nombre de colonnes à afficher (ici 2) en renseignant le champ « Modèle largeur cellule ».

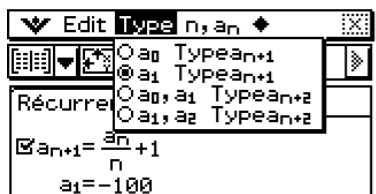


fig1 : définition de ( $a_n$ )

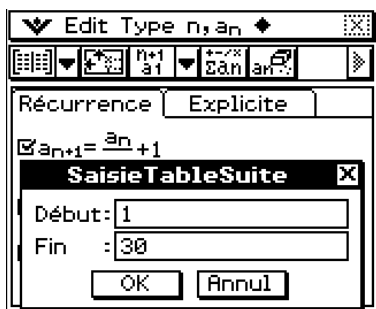


fig2 : définition de la table

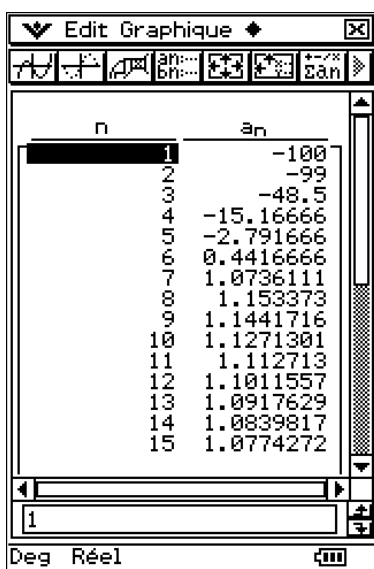


fig3 : de  $a_1$  à  $a_{15}$

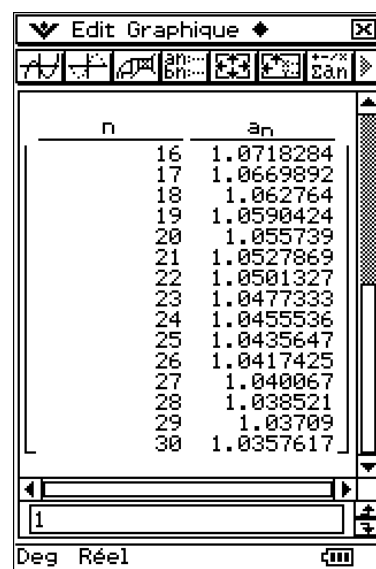


fig4 : de  $a_{16}$  à  $a_{30}$

Voici d'autres échantillons de la suite ( $a_n$ ), de  $a_1$  à  $a_{15}$ , pour d'autres valeurs  $a_1$ .

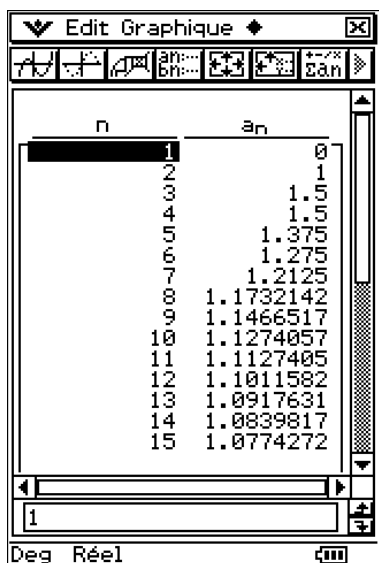


fig5 : pour  $a_1 = 0$

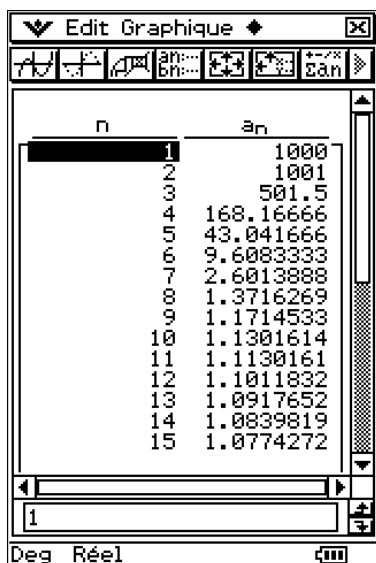


fig6 : pour  $a_1 = 1000$

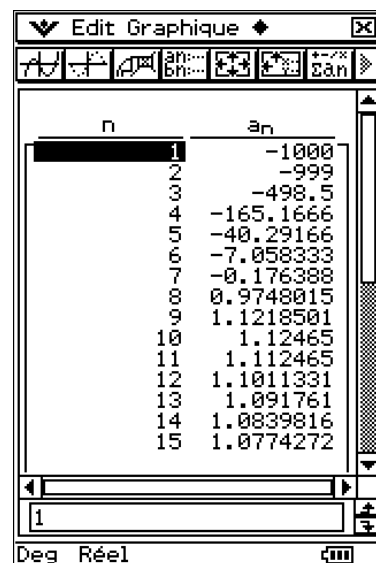


fig7 : pour  $a_1 = -1000$

Bien sûr, il est possible de visualiser graphiquement le comportement de la suite  $(a_n)$ .

Pour cela, il faut d'abord calculer la table des valeurs et activer la fenêtre qui contient cette table.

On définit la fenêtre de tracé avec .

Il suffit ensuite de toucher l'icône  avec le stylet.

Le nuage des points (reliés par des segments) de la suite est alors tracé (dans les limites de la table des valeurs et des intervalles de la fenêtre de tracé).

On en voit un exemple fig8 : on a choisi ici  $a_1 = -10$  et calculé les quinze premières valeurs, avec  $[0, 15]$  comme intervalle en  $x$ , et  $[-10, 2]$  comme intervalle en  $y$ .

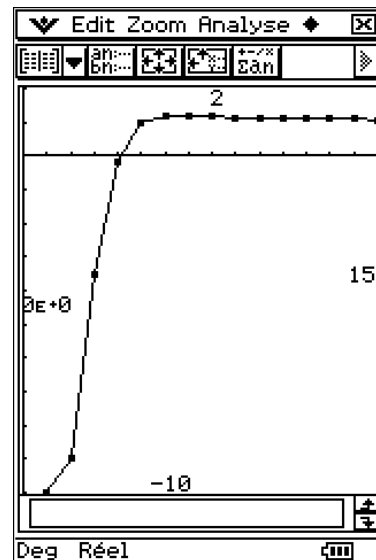


fig8 : tracé quand  $a_1 = -10$

◇ Dans l'application  Tableur

On entre dans cette application et on y crée une nouvelle feuille par « Fich/Nouveau ».

Dans la cellule A1, on place par exemple la valeur  $-100$ .

On place ensuite le curseur sur la cellule A2. On choisit la fonction « Edit/Remplir échelle » et on renseigne la fenêtre comme indiqué fig9.

Ainsi on copie la formule  $=A1/\text{row}(A1)+1$  de A2 jusqu'à A30.

Comme il s'agit d'*adressage relatif*, cela signifie qu'on place  $=A[k-1]/\text{row}(A[k-1])+1$  dans la cellule A[k], pour  $2 \leq k \leq 30$ .


L'expression  $\text{row}(cell)$  désignant le numéro de ligne de la cellule  $cell$ , on a donc bien placé la formule  $=A[k-1]/(k-1)+1$  dans la cellule A[k].

On voit le résultat fig10 : on a ici augmenté la largeur de la colonne A à sa valeur maximum, c'est-à-dire 80, avec « Edit/Largeur colonne ».

Il est facile de calculer les premiers termes de la suite  $(a_n)$  pour d'autres valeurs de  $a_1$  !

Il suffit en effet de modifier le contenu de la cellule A1 : le reste de la colonne est automatiquement recalculé (cf fig11, où on a posé  $a_1 = -10$ ).

On peut également visualiser graphiquement le comportement de la suite  $(a_n)$ .

Il suffit pour cela de sélectionner la colonne A (ou seulement quelques termes consécutifs de celle-ci) et de choisir la fonction « Type/Courbe/Groupé » (ou l'icône .

On voit (fig12) ce qu'on obtient avec  $a_1 = -10$  en sélectionnant puis en traçant la zone qui va de A1 à A15 (utiliser la fonction « Edit/Sélectionner échelle »).

2. Il semble que  $(a_n)$  soit systématiquement convergente vers le réel 1.

On a  $a_2 = a_1 + 1$  donc  $a_2 > a_1$ , et il semble que  $(a_n)$  soit décroissante (à partir de  $a_2$  quand  $a_1$  est positif, à partir d'un "certain rang" quand  $a_1$  est négatif).

On remarque aussi (du moins avec les exemples précédents) que les valeurs de  $a_n$ , à partir de  $a_{15}$  du moins, sont quasiment indépendantes de la valeur initiale  $a_1$ . Cela accredité l'idée d'un comportement final commun.

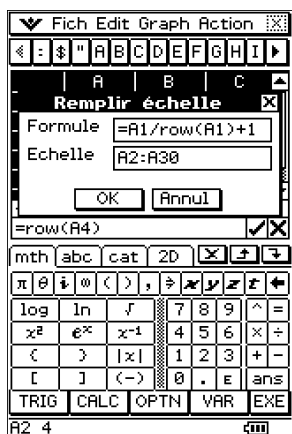


fig9 : définir les  $a_n$

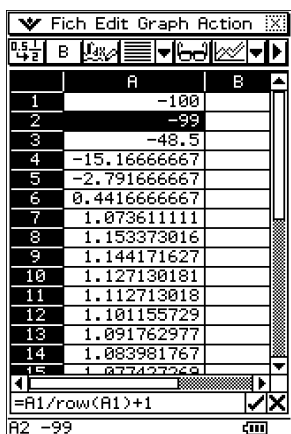


fig10 :  $a_1 = -100$

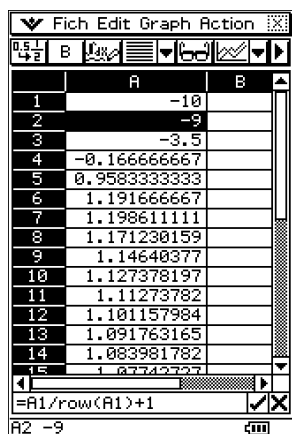


fig11 :  $a_1 = -10$

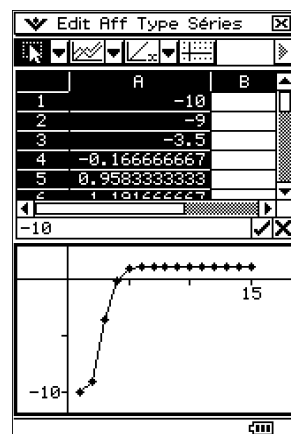


fig12 : tracé sélection

3. Dans cette question on suppose que  $u_1 = -100$ .

On a calculé les 30 premiers termes de cette suite et on a constaté les inégalités suivantes :

$$u_1 = -100 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5 < 0 < u_6 < 1 < u_7 < u_8 < u_9$$

C'est en effet à partir de  $u_8$  qu'on a constaté un changement de monotonie.

La relation  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$  prouve clairement que dès qu'un terme de la suite  $u$  est strictement positif, alors tous ceux qui le suivent le sont également.

On est donc certain que les  $u_n$  sont strictement positifs si  $n \geq 8$ .

On sait que  $u_9 < u_8$ . Supposons  $u_{n+1} < u_n$ , pour un certain entier  $n$ , avec  $n \geq 8$ .

Alors  $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}}{n+1} + 1 < \frac{u_n}{n+1} + 1 < \frac{u_n}{n} + 1$  (cette dernière égalité car  $u_n > 0$ ).

On a obtenu  $u_{n+2} < \frac{u_n}{n} + 1$  c'est-à-dire  $u_{n+2} < u_{n+1}$ .

Par récurrence sur  $n$ , on a donc prouvé l'inégalité  $u_{n+1} < u_n$  pour tout  $n \geq 8$ .

Autrement dit, la suite  $(u_n)_{n \geq 8}$  est strictement décroissante.

Comme elle est minorée (par 0) elle est convergente. Soit  $\ell$  sa limite.

Si on fait tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans l'égalité  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$ , on trouve  $\ell = 1$ .

Conclusion : si  $u_1 = -100$ , la suite  $(u_n)$  est convergente de limite 1.

4. Complément

On va généraliser ce qui précède et montrer que, quelle que soit la valeur de  $u_1$ , la suite  $(u_n)$  est convergente vers 1.

Commençons par prouver que la suite  $(u_n)$  n'est jamais entièrement à termes négatifs.

Supposons par l'absurde qu'on ait  $u_n \leq 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

L'égalité  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1 = \frac{u_n + n}{n}$  donne alors  $u_n \leq -n$  si  $n \geq 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

Mais par ailleurs, si  $n \geq 3$  :  $|u_{n+1}| = \left| \frac{u_n}{n} + 1 \right| \leq \frac{|u_n|}{n} + 1 \leq \frac{|u_n|}{3} + 1 \leq \frac{2|u_n|}{3}$ .

Les inégalités  $|u_{n+1}| \leq \frac{2|u_n|}{3}$  conduisent à  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$  et on tient une contradiction !

Conclusion provisoire : quel que soit  $u_1$ , il existe toujours un entier  $k$  tel que  $u_k > 0$ .

Par récurrence évidente, les égalités  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$  donnent  $u_n > 0$  pour  $n \geq k$  (et même  $u_n > 1$  pour  $n \geq k + 1$ ).

Supposons, par l'absurde, que la suite  $(u_n)_{n \geq k}$  soit croissante.

La seule limite réelle possible est  $\ell = 1$ , par passage à la limite dans  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$ .

Or cela ne se peut, du fait des inégalités  $u_n \geq u_{k+1} > 1$  pour  $n \geq k + 1$ .

La seule possibilité est donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

Mais pour  $n$  assez grand, il en résulte  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1 < \frac{u_n}{3} + 1 < u_n$ .

Cette contradiction nous assure que la suite  $(u_n)_{n \geq k}$  n'est pas croissante.

Il existe donc un entier  $p \geq k$  tel que  $0 < u_{p+1} < u_p$ .

On termine alors la démonstration comme on l'a fait dans le cas  $u_1 = -100$ , en montrant que la suite est décroissante à partir du rang  $p$  puis qu'elle converge vers 1.

Conclusion finale : quelle que soit la valeur de  $u_1$ , la suite  $(u_n)$  est positive décroissante à partir d'un certain rang et elle converge vers 1.

### 5. Complément au complément

La démonstration précédente est intéressante (récurrences, raisonnements par l'absurde) mais en fait il y a beaucoup plus simple!! (tant pis, je la garde en souvenir).

Notons  $(v_n)$  la suite définie par  $v_1 = 3$  et  $v_{n+1} = \frac{v_n}{n} + 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

(c'est la même récurrence, mais ici on fixe la valeur du premier terme  $v_1$ ).

Tous les  $v_n$  sont évidemment strictement positifs, et on a  $v_2 = v_1 + 1 = 4$  et  $v_3 = \frac{v_2}{2} + 1 = 3$ .

Ainsi  $0 < v_3 < v_2$  : d'après une partie de la démonstration précédente cela nous assure que la suite  $(v_n)$  est décroissante (à partir de  $n = 2$ ) et convergente vers 1.

Soit maintenant  $(u_n)$  une suite définie par  $u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + 1$  pour  $n \geq 1$  et  $u_1$  quelconque.

Par différence, on a  $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{n}$  pour  $n \geq 1$ .

Une récurrence évidente donne alors l'égalité  $u_n - v_n = \frac{u_1 - v_1}{(n-1)!}$  pour tout  $n \geq 1$ .

Ainsi  $u_n = v_n + \frac{u_1 - v_1}{(n-1)!}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ .

Avec cette méthode, on voit donc qu'il suffit d'étudier un seul cas particulier pour résoudre le cas général (mais pour réhabiliter un peu la première démonstration, notons qu'on ne prouve pas ici la monotonie de la suite  $(u_n)$  si  $u_1 < v_1$ ).

Incidentement, on a l'explication d'une observation faite précédemment et disant que les termes des différentes suites  $(u_n)$  sont quasiment indépendants de  $u_1$  (relativement à la précision de la calculatrice) dès que  $n \geq 15$  (tout ça grâce au dénominateur en  $n!$ ).