Section plane d'un tétraèdre,
optimisation d'une distance

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on définit les points $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)$, et le point I milieu du segment $[AB]$.

Partie expérimentale

1. (a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace, représenter le tétraèdre $OABC$ et le point I.

   (b) Pour un point M du segment $[AC]$, on définit le plan $\mathscr{P}$ passant par le point I et orthogonal à la doite (IM). Tracer la section du tétraèdre $OABC$ par le plan $\mathscr{P}$.

   (c) Le plan $\mathscr{P}$ coupe la droite (OB) en un point N. Construire le point N et tracer le segment $[MN]$.

   Appeler l'examinateur pour lui présenter la figure construite.

2. Étudier, à l'aide du logiciel, les variations de la longueur MN et conjecturer la position du point M, sur le segment $[AC]$, telle que cette longueur soit minimale. Quelle est, d'après le logiciel, cette longueur minimale ?

   Appeler l'examinateur pour lui présenter les observations faites et les résultats obtenus.

Démonstrations

On définit le réel $t = \dfrac{AM}{AC}$ et on admet que les coordonnées des points M et N sont respectivement $M(1-t, 0, t)$ et $N(0, t, 0)$.

3. Calculer la longueur MN en fonction de t.

   Appeler l'examinateur pour lui expliquer la méthode prévue pour déterminer le minimum de cette longueur.

4. Déterminer la valeur de t pour laquelle cette distance est minimale.

5. Donner la valeur minimale prise par la longueur MN.

Production demandée

– Réalisation d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
– Présentation orale, à partir de l'écran, des conjectures.
– Solution argumentée de la question 4.

Proposition de corrigé avec le Classpad

◇ *Tracé de la figure avec Cabri-Géomètre 3D*

Aucune calculatrice ne possède à ce jour d'application de géométrie en 3D.

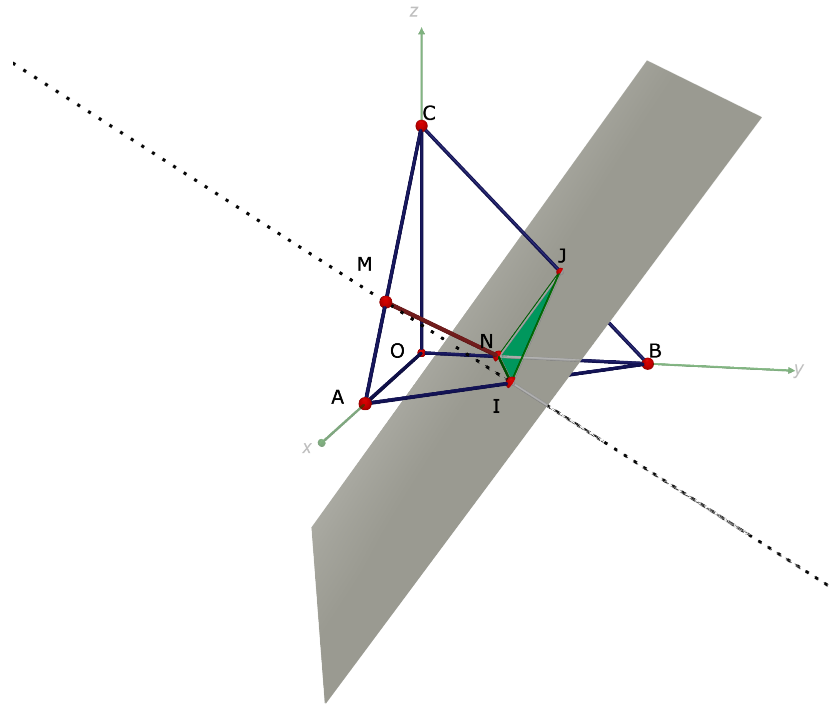
Plutôt que d'essayer de tracer la figure en perspective cavalière (comme dans le sujet 29), on s'en remet ici au logiciel spécialisé "Cabri-Géomètre 3D".

On utilisera cependant le calcul formel pour une autre approche de l'exercice.

Voici la construction. On y distingue le tétraèdre $OABC$, le milieu I de $[AB]$, un point M de $[AC]$, la droite (IM) (en pointillés), et le plan $\mathscr{P}$ passant par I et orthogonal à (IM).

Le plan $\mathscr{P}$ découpe dans le tétraèdre $OABC$ une plaque triangulaire INJ.

On a également tracé $[MN]$.



◇ *Utilisation d'une eActivité*

L'application "eActivity" du Classpad permet de créer des documents (des *eActivités*) faisant appels aux différentes applications (géométrie, tableur, calcul formel, etc).

Outre l'intérêt qu'il y a à faire coopérer plusieurs environnements dans un même document, une des qualités des eActivités est qu'elles sont pleinement éditables et qu'on peut les sauvegarder (contrairement aux calculs effectués dans l'application Principale).

On va donc former une eActivité, essentiellement pour résoudre l'exercice proposé à l'aide du calcul symbolique.

On ouvre donc l'application par un appui sur l'icône eActivity dans l'écran d'accueil du Classpad.

On débute une nouvelle eActivité par « `Fich/Nouveau` ». Chaque ligne à l'écran est soit un bandeau, soit un lien géométrique, soit une ligne de texte, soit une ligne de calcul. Nous n'utiliserons que ces deux dernières possibilités dans l'exercice.

Une ligne de texte peut être transformée en ligne de calcul (ou inversement) par un appui sur l'icône ou sur l'icône .

Avec les icônes B ou **B**, une ligne de texte peut être écrite en caractères gras ou en caractères normaux (cette icône est grisée quand on est sur une ligne de calcul).

On peut toujours insérer une nouvelle ligne (de texte ou de calcul, pour ce qui nous concerne ici) avec les fonctions « `Ligne Calcul` » ou « `Ligne Texte` » du menu `Ins`.

La première instruction (`Clear_a_z`) est utile pour effacer toutes les variables dont le nom consiste en une seule lettre de notre alphabet.

Nous allons en effet utiliser des variables “muettes”, pour désigner un paramètre t ou les coordonnées x, y, z d'un point quelconque.

On définit ensuite les points de base O, A, B, C, sous la forme de vecteurs à trois composantes.

La définition du point O est facultative, mais elle apporte un peu plus d'homogénéité.

On définit le point I comme milieu du segment $[AB]$.

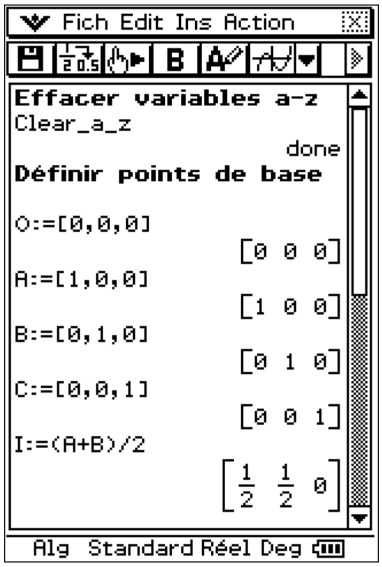


fig1 : les points de base

On définit ensuite M sur $[AC]$, en posant $M = A + \overrightarrow{AC}$.

Sur le Classpad, cela devient $M = A + t(C - A)$.

NB : cette utilisation de t est conforme aux notations de l'énoncé dans la partie “Démonstrations”.

On écrit qu'un point $K = (x, y, z)$ est dans $\mathscr{P}$ si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{IM}$ est nul.

On obtient ainsi l'équation du plan $\mathscr{P}$, qu'il convient de simplifier un peu pour la rendre “présentable”.

L'équation de $\mathscr{P}$ est donc $(1 - 2t)x - y + 2tz + t = 0$.

Bien sûr, elle dépend du paramètre t, c'est-à-dire de la position de M sur le segment $[AC]$.

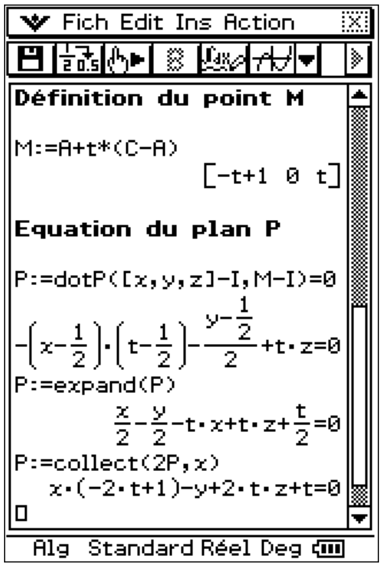


fig2 : point M et plan $\mathscr{P}$

Pour trouver $N = \mathscr{P} \cap (OB)$, on exprime l'équation de $\mathscr{P}$ sous la forme $y = y(x, z)$, puis on injecte ce résultat (et les conditions $x = z = 0$) dans les coordonnées $[x, y, z]$ d'un point quelconque.

Ainsi $N = (0, t, 0)$ (ce que l'énoncé suggérait d'admettre).

Même si l'énoncé ne le demande pas, on peut trouver les coordonnées du point $J = \mathscr{P} \cap (BC)$ (voir figure).

La droite (BC) a en effet pour équation $x = 0$ et $y = 1 - z$.

On trouve $J = \left(x_J = 0, y_J = \dfrac{3t}{1 + 2t}, z_J = \dfrac{1 - t}{1 + 2t}\right)$.

Si t décrit $[0, 1]$, y_J croît de 0 à 1 et z_J décroît de 1 à 0.

Il en résulte que lorsque M décrit $[AC]$, J décrit $[CB]$.

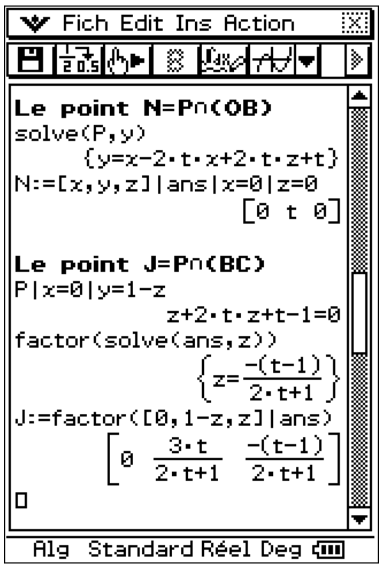


fig3 : N (et J en prime)

On va maintenant calculer le minimum de MN.

Pour cela, on calcule cette longueur avec `norm`.

On trouve $MN = \sqrt{3t^2 - 2t + 1}$.

La dérivée de MN^2 fait apparaître l'importance de $t = \dfrac{1}{3}$ (dérivée négative avant cette valeur, positive ensuite).

$\min(MN)$ est donc atteint si $t = \dfrac{1}{3}$, et vaut $\dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.8165$.

On retrouve d'ailleurs ce résultat avec la fonction `fMin`.

Enfin, pour $t = \dfrac{1}{3}$, on a $M = \Big(\dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{1}{3}\Big)$ et $N = \Big(0, \dfrac{1}{3}, 0\Big)$.

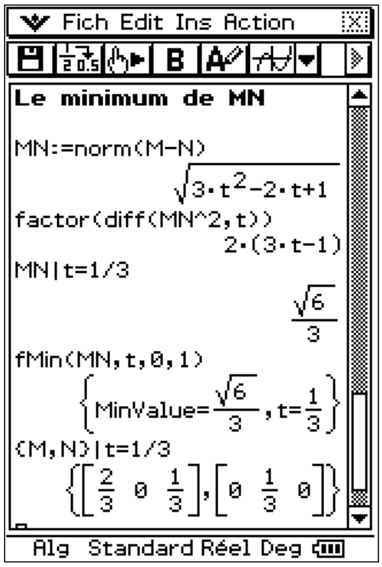


fig4 : le minimum de MN

Bien que ce ne soit absolument pas demandé par l'énoncé, on peut calculer pour quel t la longueur du segment MJ est minimale (J désignant pour nous l'intersection $\mathscr{P} \cap (BC)$).

On voit les calculs ci-dessous (qui montrent un peu la puissance du calcul formel du Classpad).

Ce minimum est atteint pour $t = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$, et vaut $\sqrt{6 - 3\sqrt{3}} \approx 0.8966$. On a alors :

$$M = \Big(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\Big), \qquad J = \Big(0, \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\Big), \qquad \overrightarrow{MJ} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}(-1, 1, 0)$$

Ainsi, quand MJ est minimum, le segment $[MJ]$ est parallèle au segment $[AB]$ (à méditer !).

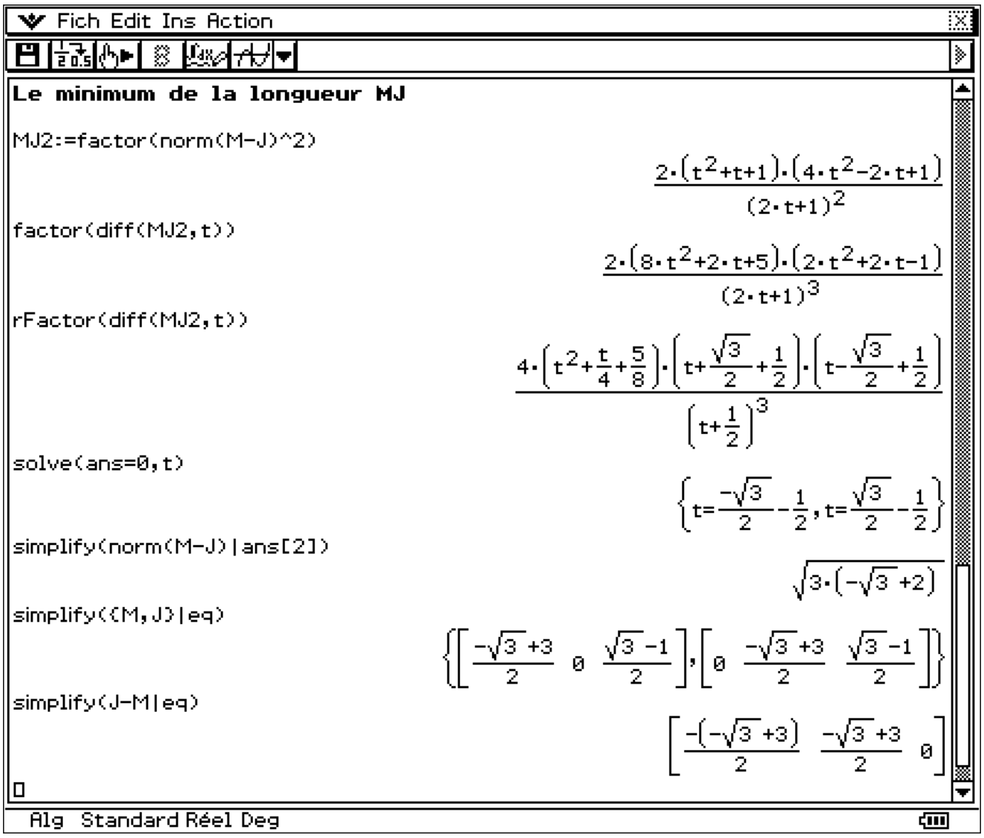


fig5 : le calcul du minimum de la longueur MJ