Cercles et similitudes

Énoncé

On considère un triangle équilatéral direct $O_1O_2O_3$, le milieu O du segment $[O_1O_2]$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre O_1 passant par O. On note A un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct du point O.
Pour tout point M du cercle $\mathcal{C}$, on note M_1 le point symétrique de M par rapport à O puis M' le point tel que le triangle MM_1M' soit équilatéral direct.

Étude expérimentale

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire le triangle $O_1O_2O_3$, placer le point O et tracer le cercle $\mathcal{C}$.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.

2. Le point A étant construit sur le cercle $\mathcal{C}$, construire le point A' associé au point A par le procédé indiqué dans le préambule.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la construction.

3. Placer un autre point, noté M, sur le cercle $\mathcal{C}$ et construire le point M' associé à ce point. Visualiser la courbe (ou lieu) que semble décrire le point M' lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ et émettre une conjecture à ce propos.

   Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture.

4. Lorsque les points M et A sont distincts, les droites (AM) et $(A'M')$ se coupent en un point P. Placer le point P sur la figure. émettre une conjecture concernant le lieu décrit par le point P lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A.

   Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et lui indiquer les méthodes prévues pour les démonstrations qui suivent.

Démonstrations

5. Montrer qu'il existe une similitude directe de centre O par laquelle le point M du cercle $\mathcal{C}$ a pour image le point M'. Préciser l'angle et le rapport de cette similitude.
6. Déterminer le lieu du point M' lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$.
7. Préciser le lieu du point P lorsque le point M décrit le cercle $\mathcal{C}$ privé du point A.

Production demandée

– Réalisation d'une figure avec un logiciel de géométrie dynamique ;

– Réponse argumentée pour les questions 5 et 6 ;

– Informations obtenues concernant le point P.

Proposition de corrigé avec le Classpad

Étude expérimentale

1. On ouvre l'application Géométrie et on débute une nouvelle figure par « `Fich/Nouveau` ».

   Avec , on supprime l'affichage des axes et de la grille des points à coordonnées entières.

   On choisit la fonction « `Tracé/Forme spéciale/Triangle équilatéral` » (ou plus simplement l'icône) et on se contente de toucher l'écran avec le stylet.

   Un triangle équilatéral ABC apparaît alors à l'écran (fig1).

   On renomme les sommets en O_1, O_2, O_3 pour se conformer à l'énoncé (pour renommer un point, on le sélectionne, puis donne accès au champ).

   On sélectionne ensuite le segment $[O_1O_2]$ puis « `Tracé/Construire/Milieu` » (ou), et on renomme en O le point obtenu.

   Enfin, on sélectionne « `Tracé/Cercle` » (ou) puis le point O_1 et enfin le point O.
   On obtient ainsi le cercle de centre O_1 passant par O (fig2).

   Un simple appui sur (ou « `Aff/Zoom plein écran` ») permet de cadrer au mieux la construction (fig3).

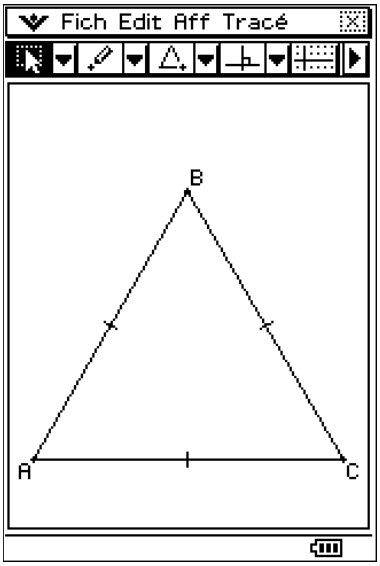

fig1 : le triangle ABC est équilatéral

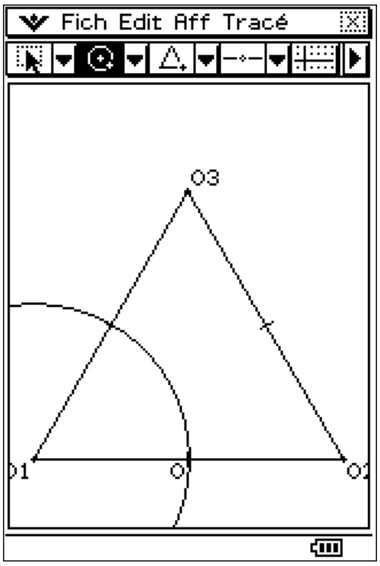

fig2 : construction de 0 et du cercle $\mathcal{C}$

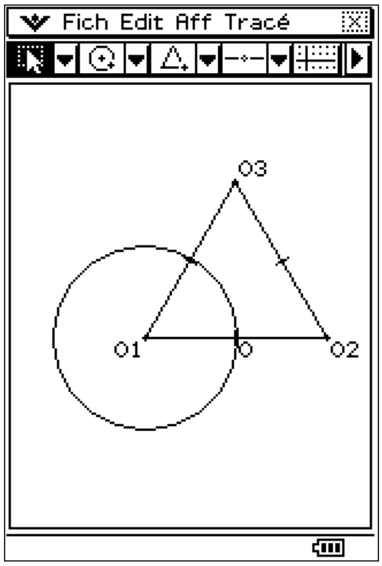

fig3 : la figure après un recadrage par

2. On choisit la fonction « `Tracé/Point` » (ou l'icône) puis on place un point sur le cercle $\mathcal{C}$ (poser et glisser le stylet sur l'écran jusqu'à ce que le cercle soit sélectionné, puis relever le stylet : le point est créé et il est lié à $\mathcal{C}$).

   On renomme en A le point obtenu.

   Avec le Classpad, le symétrique de A par rapport à O est l'image de A dans l'homothétie (dilatation) de centre O et de rapport -1.

On sélectionne donc A puis « `Tracé/Construire/Dilatation` » (ou l'icône).

On sélectionne ensuite O (c'est le centre de l'homothétie) et on indique (dans la fenêtre qui apparaît alors) que le rapport de cette homothétie vaut -1.

On renomme en A_1 le point obtenu (fig4 : s'il est hors-écran, utiliser pour recadrer).

Le point A' (tel que le triangle AA_1A' soit équilatéral direct) est l'image de A_1 dans la rotation de centre A et d'angle 60°.

Pour créer A', on sélectionne A_1, puis (ou « `Tracé/Construire/Rotation` »), puis le point A (le centre de la rotation). Dans la fenêtre qui apparaît alors, on précise un angle de 60°. Là encore, si le point créé est en dehors des limites de la fenêtre, on utilise pour recentrer la construction. On renomme en A' le point créé (fig5).

Même si c'est facultatif, on peut tracer le triangle AA_1A' (utiliser qui permet en fait de tracer un polygône fermé quelconque : le polygône est terminé quand on revient au point de départ). On voit le résultat fig6.

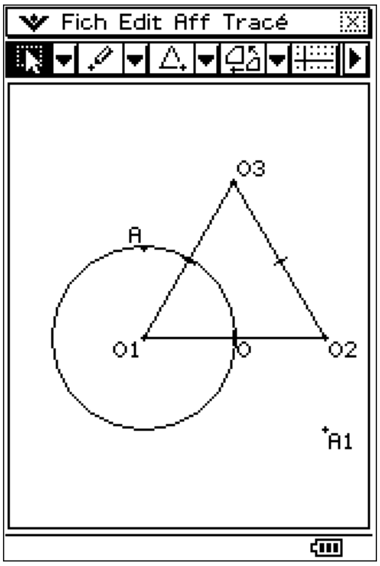

fig4 : le symétrique A_1 de A par rapport à O

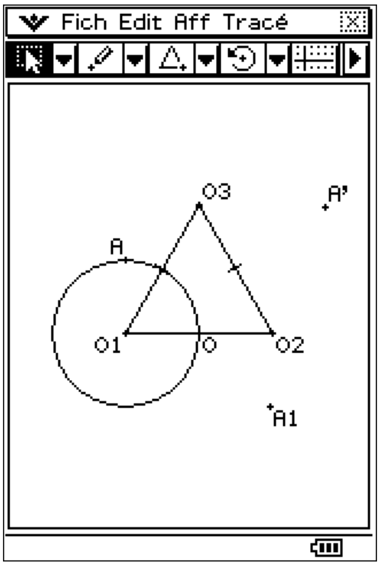

fig5 : A' est l'image de A_1 dans la rotation $r(A, 60^\circ)$

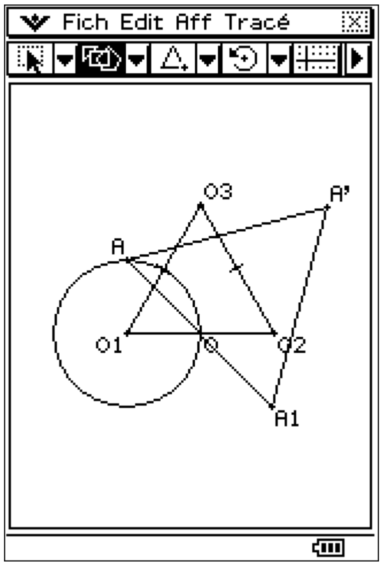

fig6 : le triangle AA_1A' est donc équilatéral direct

3. On effectue maintenant la même construction à partir d'un point M du cercle : les points sont renommés en conformité avec l'énoncé (fig7).

   On va maintenant créer une animation. On sélectionne M et le cercle, puis la fonction « `Edit/Animer/Ajouter Animation` ».

   La fonction « `Edit/Animer/Editer Animations` » permet de choisir le nombre d'étapes, par exemple 61 (fig8). Cela fait 60 étapes pour un tour total de M sur $\mathcal{C}$ (donc chaque étape représente une rotation de 6°).

   Pour tracer le lieu de M' quand M décrit $\mathcal{C}$, on sélectionne M' puis « `Edit/Animer/Tracé` ».

   On lance l'animation (« `Edit/Animer/Lancer (une fois)` ») pour voir qu'apparemment le point M' décrit le cercle de centre O_3 et passant par O (fig9).

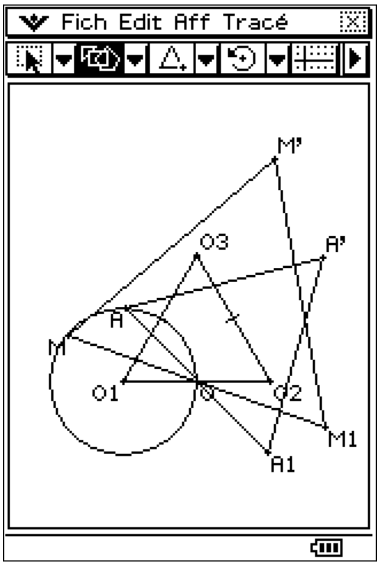

fig7 : le point M', image du point M de $\mathcal{C}$

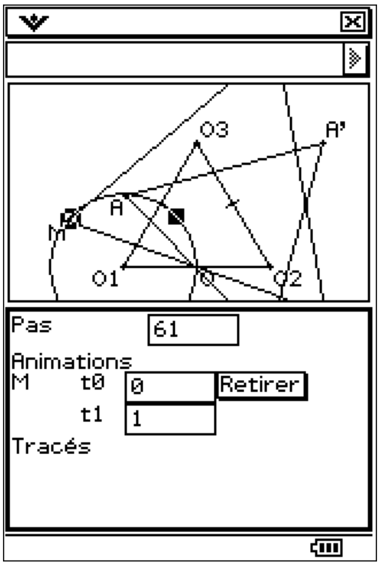

fig8 : une animation en 61 étapes

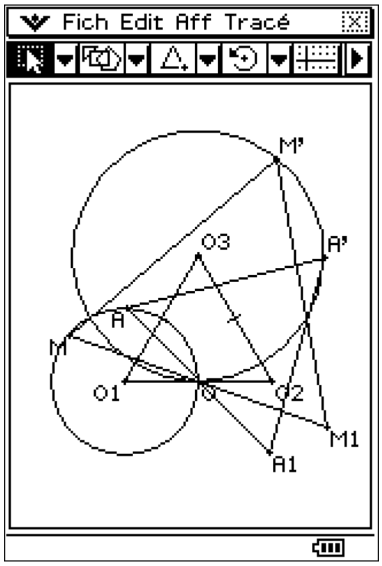

fig9 : le lieu de M' quand M décrit $\mathcal{C}$

4. On trace les droites (AM) et $(A'M')$ (icône puis sélectionner deux points) puis leur point d'intersection (sélectionner les deux droites puis) qu'on renomme en P.

   Remarque : après les avoir sélectionnés et grâce à « `Edit/Propriétés/Caché` », on a caché les segments des triangles AA_1A' et MM_1M' pour alléger un peu la construction (fig10).

   On sélectionne P puis « `Edit/Animer/Tracé` ». On relance l'animation pour voir qu'apparemment le point P décrit le cercle de diamètre $[AA']$ (fig11).

   On peut très bien tracer simultanément le lieu de M' et celui de P (fig12 : sélectionner ces deux points avant de choisir « `Edit/Animer/Tracé` », puis lancer l'animation).

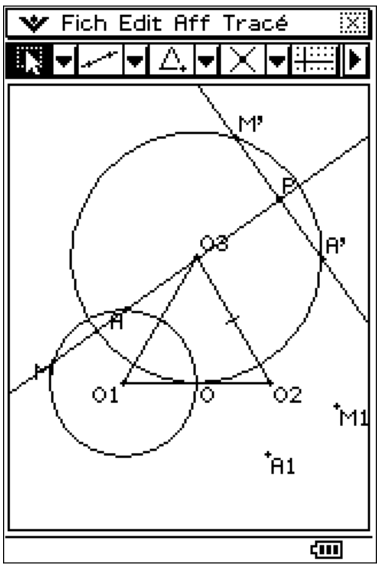

fig10 : le point P sur (AM) et $(A'M')$

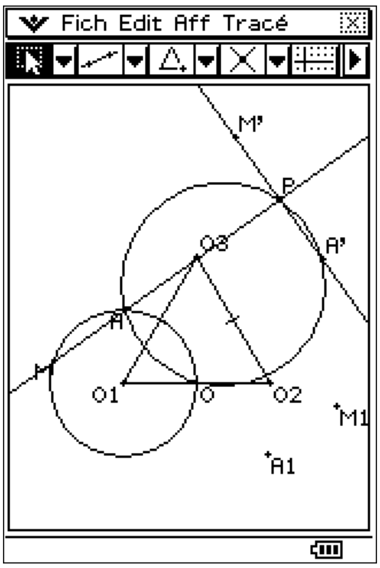

fig11 : le lieu de P quand M décrit $\mathcal{C}$

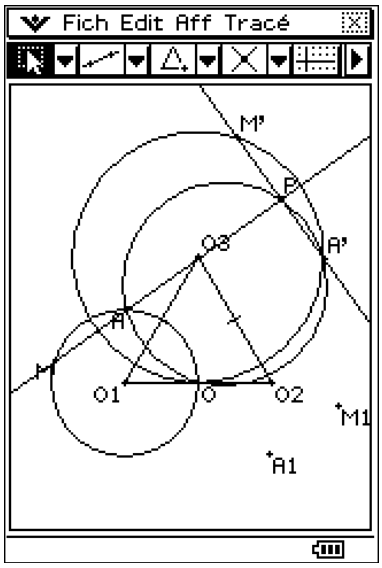

fig12 : les lieux de M' et de P, simultanément

Démonstrations

5. On se place dans le plan complexe. On peut considérer que O en est l'origine.

   Soit z, z_1 et z' les affixes respectives de M, M_1 et M'.

   On a $z_1 = -z$ car M_1 est l'image de M dans la symétrie de centre O.

   Puis $M' = r(M_1)$, où r est la rotation de centre M et d'angle $\pi/3$.

   On en déduit l'égalité $z' - z = \omega(z_1 - z) = -2\omega z$ avec $\omega = \mathrm{e}^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.

   Ainsi $z' = (1 - 2\omega)z = -i\sqrt{3}z$: le point M' est donc l'image de M dans la similitude s directe de centre O, de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $-\pi/2$.

6. L'image d'un cercle de centre Ω et de rayon r par une similitude σ de rapport k est le cercle de centre $\sigma(\Omega)$ et de rayon kr.

   Par construction, le point O_3 se déduit de O_1 comme M' se déduit de M, donc $s(O_1) = O_3$.

   Soit a la longueur d'un coté du triangle $O_1O_2O_3$. Le lieu de M' quand M parcourt $\mathcal{C}$ (de centre O_1 et de rayon $a/2$) est le cercle de centre $s(O_1) = O_3$ et de rayon $\dfrac{a}{2}\sqrt{3}$ (c'est la hauteur de $O_1O_2O_3$), c'est-à-dire le cercle de centre O_3 et qui passe par O.

   Notation : dans toute la suite, nous noterons $\mathcal{C}'$ le cercle parcouru par M'.

   Remarque : il était clair que le cercle image $\mathcal{C}'$ passerait par O, car ce point est élément de $\mathcal{C}$ et il est invariant dans la transformation $M \mapsto M'$.

7. Puisque le point M est distinct de A, le point $M' = s(M)$ est distinct de $A' = s(A)$.

   Avec les notations précédentes, et du fait que $A' = s(A)$ et $M' = s(M)$, la droite $(A'M')$ est l'image de la droite (AM) dans la similitude s. Il en découle que ces deux droites sont orthogonales (la similitude est d'angle $-\pi/2$).

   Le point P est donc sur le cercle $\mathcal{C}''$ de diamètre $[AA']$ (rappelons que A et $A' = s(A)$ sont distincts car A est distinct de O, le seul point fixe de la similitude s).

   Remarque : quand M tend vers A, M' tend vers A' ; la droite (AM) tend alors vers la tangente en A à $\mathcal{C}$ et la droite $(A'M')$ tend vers la tangente en A' à $\mathcal{C}'$. Ces deux tangentes (orthogonales) se coupent en un point P_0.

   Réciproquement, soit P un point de $\mathcal{C}''$, distinct de P_0. La droite $(A'P)$ (non tangente en A' à $\mathcal{C}'$) recoupe $\mathcal{C}'$ (de centre O_3 passant par O) en un point M' distinct de A'. Ce point M' est l'image par la similitude s d'un point M de $\mathcal{C}$ (distinct de A).

   On peut alors reprendre la construction à partir de M, et cette construction nous conduit au point P.

   Conclusion : quand M parcourt $\mathcal{C} \setminus \{A\}$, P décrit le cercle $\mathcal{C}''$ de diamètre $[AA']$ (privé d'un certain point P_0).

   On a représenté ici (fig13) le point P_0 qui n'appartient pas au lieu de P (mais P tend vers P_0 quand M tend vers A).

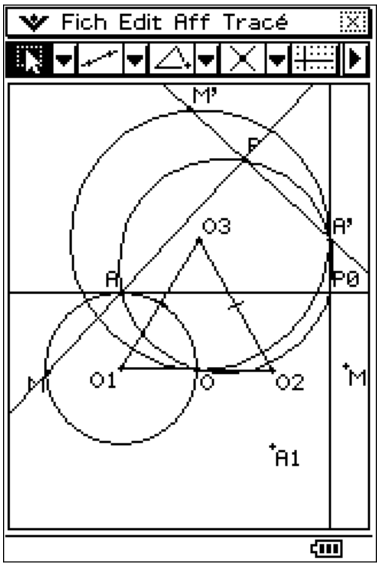

fig13