Suite définie par une moyenne arithmétique

Énoncé

On considère la suite (u_n) définie pour tout n entier strictement positif par :

$$u_n = \frac{6}{n}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Étude expérimentale

1. A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, représenter graphiquement les 50 premiers termes de la suite (u_n).
2. Émettre une conjecture sur le type de fonction f telle que, pour tout n entier entre 1 et 50, on ait : $u_n = f(n)$.

   > Appeler l'examinateur pour exposer votre conjecture et proposer une méthode pour la préciser.

3. Mettre en place la stratégie validée par l'examinateur et déterminer précisément la fonction f.

   > Appeler l'examinateur, lui indiquer la fonction f trouvée et lui proposer une méthode pour résoudre la question 4.

Démonstrations

4. (a) Démontrer que pour tout n entier naturel non nul, on a $u_n = f(n)$ où f est la fonction validée par l'examinateur.

   (b) En déduire une formule simple donnant la somme des carrés des n premiers entiers strictement positifs.

Production demandée

– Des explications orales et à l'écran pour les questions 1 à 3 ;

– Les réponses argumentées à la question 4.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. ⋄ *Dans l'application* Suites

   On ouvre cette application par un appui du stylet sur l'icône Suites dans l'écran d'accueil du Classpad.

   On sélectionne l'onglet `Explicite`, puis « `Edit/Tout effacer` ».

   On entre la définition de la suite (qui s'écrira ici `a`$_n$`E` plutôt que u_n), comme indiqué fig1 (utiliser l'onglet 2D du clavier virtuel pour faciliter la saisie).

   On définit la table des valeurs avec (fig2 : on calculera donc les 50 premières valeurs).

   On affiche cette table avec , et on maximise la fenêtre avec `Resize` (fig3).

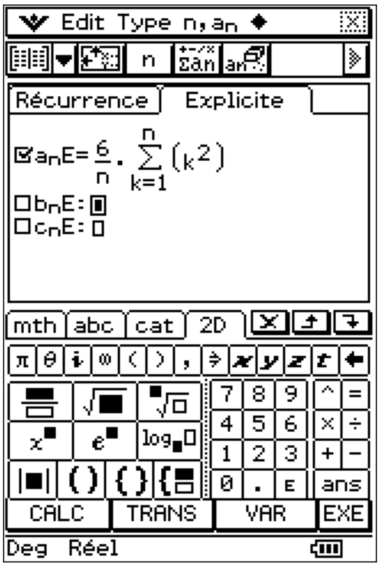


fig1 : définir la suite

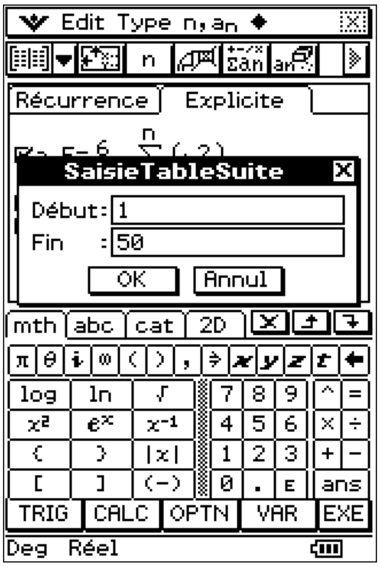


fig2 : définir la table

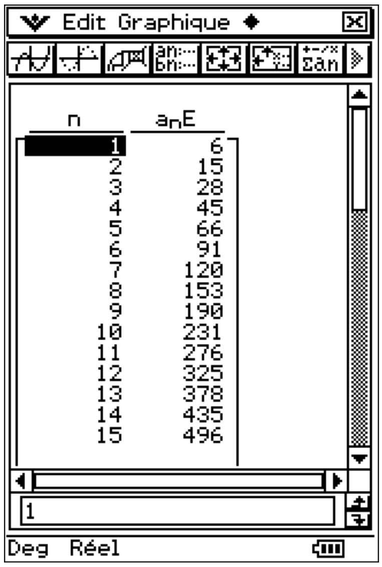


fig3 : afficher la table

Pour visualiser graphiquement les termes qui viennent d'être calculés, on active la fenêtre qui contient la table des valeurs.

Un contact du stylet et de l'icône affiche alors le nuage des points (n, u_n) (avec l'icône , on obtiendrait un nuage de points reliés par des segments).

On maximise ensuite la fenêtre de tracé par un appui sur l'icône `Resize`.

On optimise enfin les intervalles de la fenêtre de tracé (à la fois en abscisse et en ordonnée) par « `Zoom/Auto` », de façon à cadrer au mieux le nuage de points (fig4).

On a vaguement l'impression que les points affichés ici sont répartis sur une parabole (à suivre).

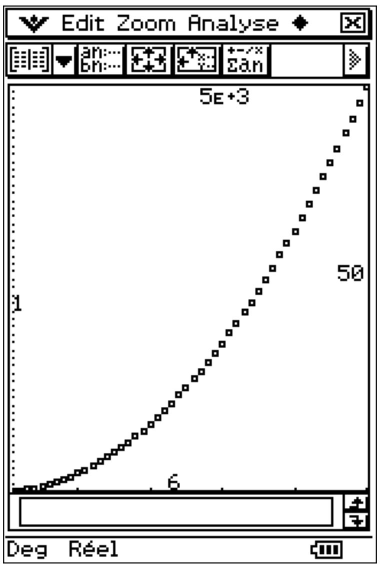


fig4 : affichage des valeurs calculées dans la table

⋄ *Dans l'application* Tableur

On entre dans cette application par un appui du stylet sur l'icône Tableur dans l'écran d'accueil du Classpad.

On crée une nouvelle feuille de calcul par « `Fich/Nouveau` ».

On choisit « `Edit/Remplir suite` » puis on renseigne la fenêtre comme indiqué (fig5).

Après validation, les cinquante premières valeurs apparaissent dans la colonne `A` (fig6).

Pour visualiser graphiquement les valeurs calculées ici, on sélectionne cette colonne et on choisit la fonction « `Type/Courbe/Groupé` » (ou l'icône).

On obtient là encore un nuage de points reliés par des segments (fig7). On obtiendrait un nuage de points isolés par un appui sur). On peut également supprimer l'affichage des segments reliant les points (ou même l'affichage des points !) dans le menu « `Aff` ».

L'affichage est toujours cadré de façon optimale (même si on modifie la taille de la fenêtre de tracé par un appui sur `Resize`).

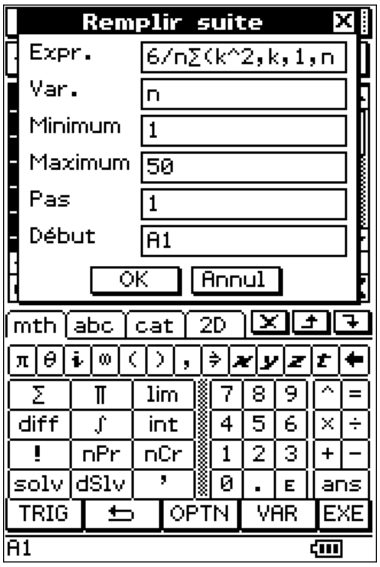


fig5 : définir la suite

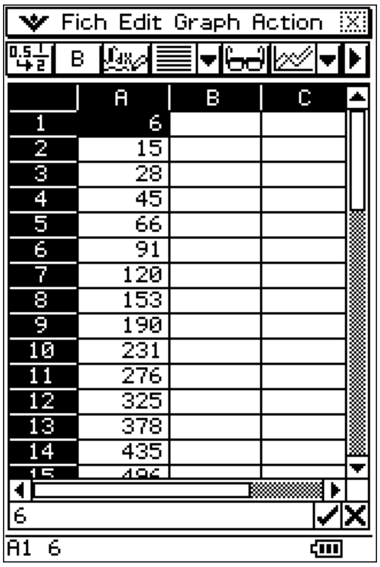


fig6 : le résultat colonne `A`

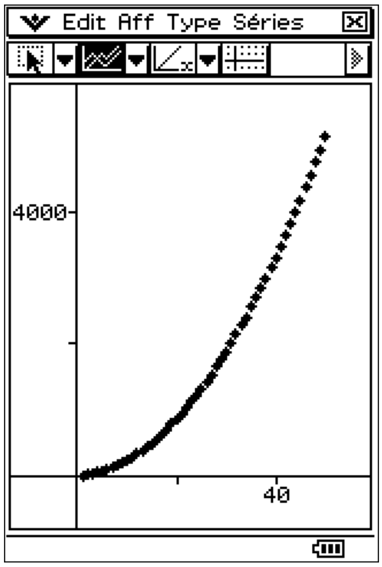


fig7 : afficher le nuage

⋄ *Dans l'application* Statistiques

On peut encore définir la suite (u_n), en calculer les premières valeurs (puis afficher ces valeurs) dans un troisième environnement du Classpad.

On y entre par un appui du stylet sur l'icône Statistiques dans l'écran d'accueil du Classpad.

On fait place nette par « `Edit/Tout effacer` ».

Dans la case `Cal▸` de la première colonne (qui correspond à la liste-système `list1`), on entre l'expression `seq(n,n,1,50)` et on valide.

La colonne `list1` se remplit alors des entiers $1, 2, \ldots, 50$.

Dans la case `Cal▸` de la deuxième colonne (qui correspond à la liste-système `list2`), on entre l'expression `seq(6/nΣ(k^2,k,1,n),n,1,50)` et on valide.

La colonne `list2` se remplit alors des cinquante premiers termes de la suite (u_n) (fig8).

On va définir le tracé des couples (n, u_n).

Pour cela, on sélectionne l'icône et on renseigne la fenêtre comme indiqué (fig9).

Un appui sur l'icône trace alors le nuage des points (n, u_n), avec ici $1 \leqslant n \leqslant 50$ (fig10).

On a ici maximisé la fenêtre de tracé par un appui sur `Resize`, et cadré au mieux le nuage de points en utilisant la fonction « `Zoom/Boîte` ».

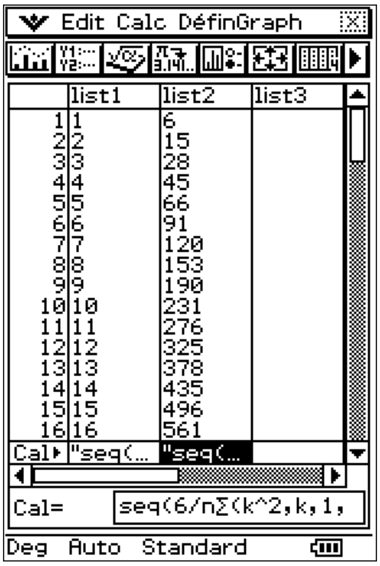


fig8 : les u_n dans `list2`

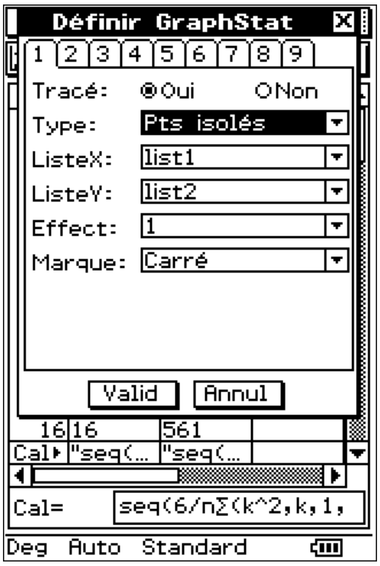


fig9 : définition du tracé

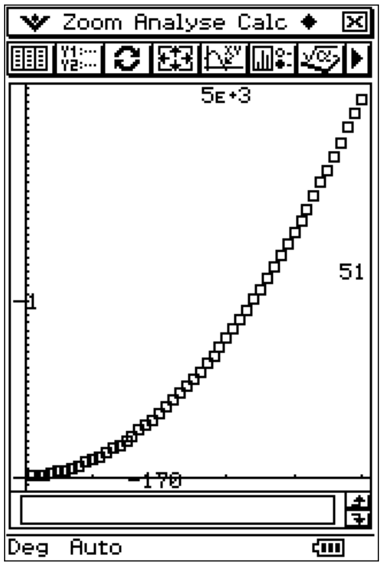


fig10 : le nuage de points

2. (et 3.) Les trois méthodes précédentes semblent indiquer qu'il existe une fonction polynôme f, de degré 2, telle que $u_n = f(n)$ pour tout n entier entre 1 et 50.

   Dans chacun des trois environnements considérés, on va voir comment deviner et/ou vérifier que, pour tout n de $[1, 51]$ (ou même pour tout n de $\mathbb{N}$), on a $u_n = (2n+1)(n+1)$.

◇ *Dans l'application* Suites

On revient dans l'environnement Suites et à la définition de la suite (u_n) (ici a_nE).

Cet environnement ne permet pas de rechercher un ajustement du nuage de points par une fonction f, mais il dispose de l'*écran d'exécution*, accessible par l'icône.

Dans cet écran, on peut faire des calculs sur la suite en cours d'étude.

On voit par exemple (fig11) que la variable $\mathtt{a}_n\mathtt{E}$ contient une chaîne de caractères donnant l'expression du terme général.

Il suffit de convertir cette chaîne avec `strToExp`, puis de simplifier le résultat, pour obtenir une expression symbolique, valable ici pour tout entier n (et pas seulement pour les valeurs calculées dans la table).

Cet environnement nous dit donc que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n = (n+1)(2n+1)$.

◇ *Dans l'application* Tableur

On revient dans cette application, où on retrouve le nuage tracé avec l'icône (fig7).

La fonction « `Séries/Barres` » permet un affichage différent, sous forme de barres verticales, qui se révélera ici plus commode (fig12).

La fonction « `Séries/Tendance/Polynomiale/Quadratique` », ou plus simplement l'icône, trace alors une courbe d'ajustement des données par une fonction f du second degré.

On peut alors sélectionner la courbe de f (qui ajuste parfaitement les données !) et en lire l'expression dans la barre d'état : $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (2x+1)(x+1)$.

L'application Tableur nous dit donc, que pour $1 \leqslant n \leqslant 50$, $u_n \approx (2n+1)(n+1)$.

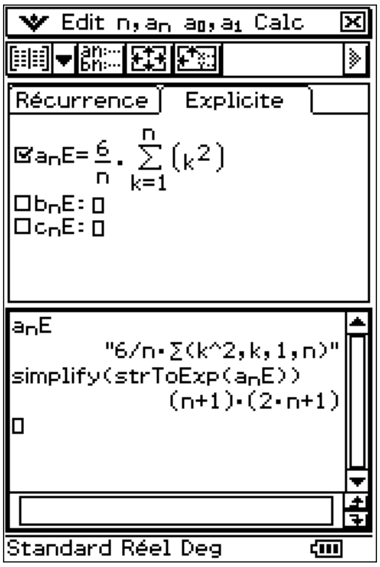


fig11 : calcul exact de u_n dans l'application Suites

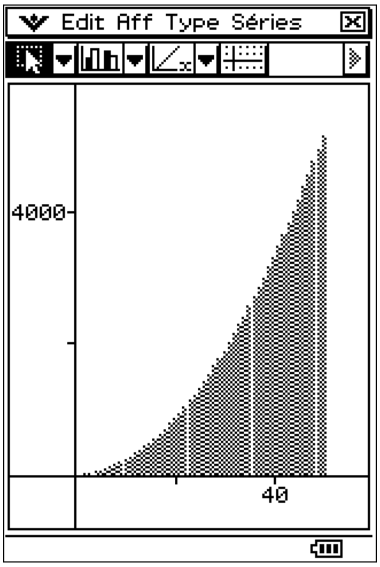


fig12 : affichage sous forme de barres dans Tableur

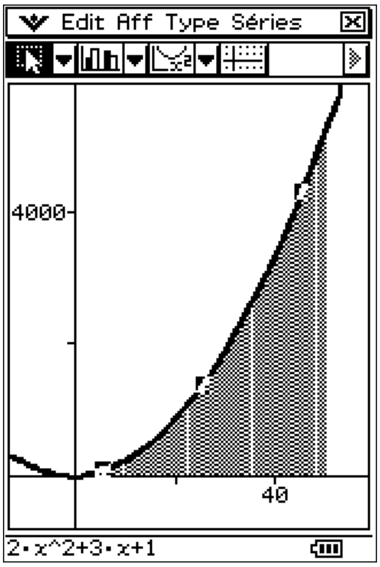


fig13 : ajustement par un polynôme de degré 2

Bien entendu, toujours dans l'application Tableur, on peut calculer les cinquante premiers termes de la suite de terme général $(2n+1)(n+1)$ et vérifier qu'ils coïncident exactement avec ceux de la suite (u_n) (fig14 à fig16).

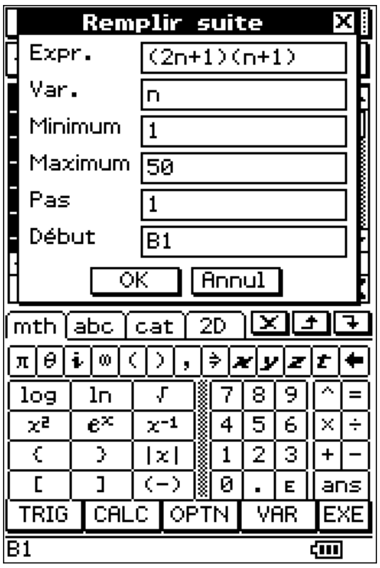
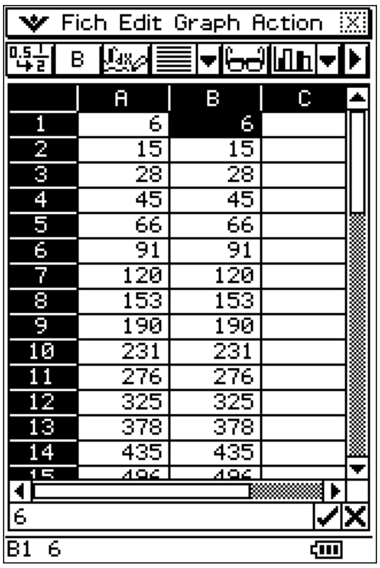
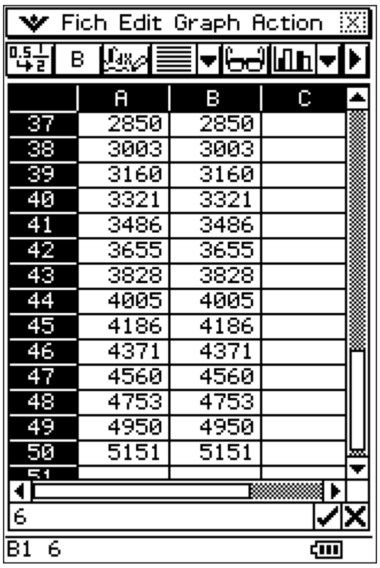


fig14



	A	B	C
1	6	6	
2	15	15	
3	28	28	
4	45	45	
5	66	66	
6	91	91	
7	120	120	
8	153	153	
9	190	190	
10	231	231	
11	276	276	
12	325	325	
13	378	378	
14	435	435	

fig15



	A	B	C
37	2850	2850	
38	3003	3003	
39	3160	3160	
40	3321	3321	
41	3486	3486	
42	3655	3655	
43	3828	3828	
44	4005	4005	
45	4186	4186	
46	4371	4371	
47	4560	4560	
48	4753	4753	
49	4950	4950	
50	5151	5151	

fig16

La vérification dans Tableur de l'égalité $u_n = (2n+1)(n+1)$, pour $1 \leqslant n \leqslant 50$

◇ *Dans l'application* 

On revient dans cette application, où on retrouve l'écran affiché fig8.

Parmi toutes les possibilités d'ajustement offertes par le menu « `Calc` », on choisit la fonction « `Rég Quadratique` », et on renseigne la fenêtre comme indiqué (fig17).

Le résultat est un ajustement semble-t'il exact (corrélation=1) par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a = 2, b = 3, c = 1$, donc $f(x) = 2x^2 + 3x + 1 = (2x + 1)(x + 1)$ (fig18).

Dès qu'on valide cette fenêtre de résultat, on voit que la colonne `list3` est remplie avec les résidus de l'ajustement (tous égaux à 0, donc l'approximation est en fait une égalité) et la courbe de régression $y = f(x)$ est tracée en superposition du nuage de points (fig19).

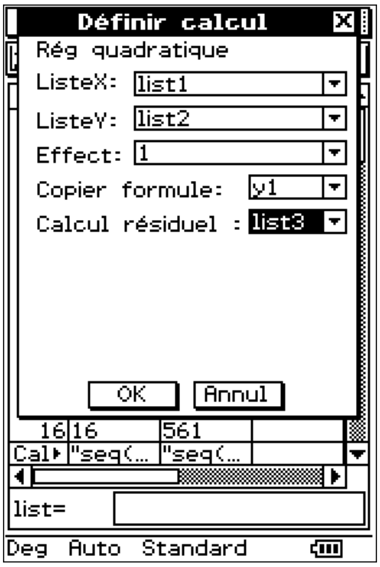


fig17

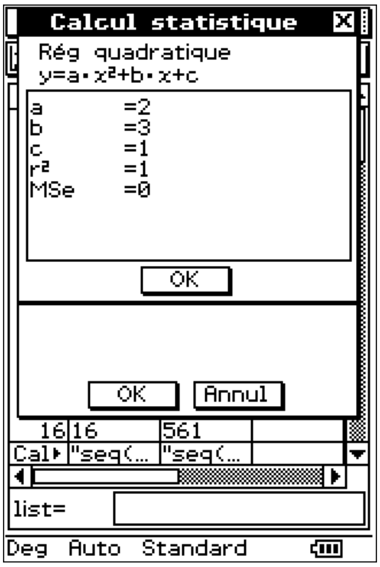


fig18

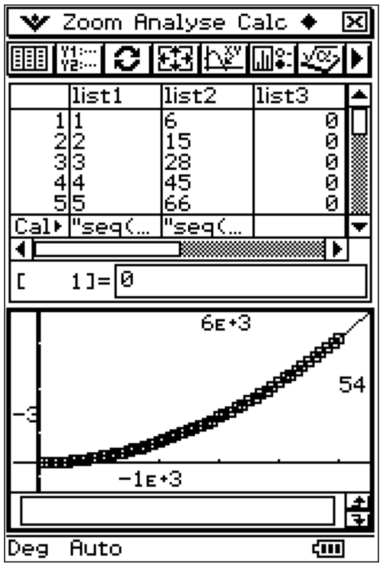


fig19

Ajustement par une fonction du second degré dans l'application 

Démonstrations

4. (a) On prouve l'égalité $u_n = (2n + 1)(n + 1)$ par récurrence sur $n \geqslant 1$.

   La formule est vraie si $n = 3$ car $u_1 = 6$.

   Supposons qu'elle le soit pour un certain entier $n \geqslant 1$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{6}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{6}{n+1}\Big(\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2\Big) = \frac{6}{n+1}\Big(\frac{n}{6}\,u_n + (n+1)^2\Big) \\ &= \frac{6}{n+1}\Big(\frac{n}{6}(2n+1)(n+1) + (n+1)^2\Big) \\ &= n(2n+1) + 6(n+1) = 2n^2 + 7n + 6 = (2n+3)(n+2) \end{aligned}$$

   Cela prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

   Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $u_n = (2n + 1)(n + 1)$.

   (b) Il en découle immédiatement : $\forall\, n \geqslant 1,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}\,u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.