Points équidistants d'une droite et d'un point

Énoncé

On considère dans le plan ($\mathscr{P}$) une droite D et un point F non situé sur cette droite. Il s'agit de déterminer l'ensemble G, lieu géométrique des points du plan équidistants de D et de F.

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la droite D et le point F.
   Construire également un point H sur la droite D et la droite T perpendiculaire à D en H.

   > Appeler l'examinateur pour vérifier la figure
   > et exposer la démarche envisagée pour la suite de la construction.

2. Construire un point M de T équidistant de F et de H.
   Construire le lieu géométrique du point M lorsque le point H décrit la droite D.
   Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de G ?

   > Appeler l'examinateur pour lui montrer la figure et lui indiquer votre conjecture.

3. On considère un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que D est la droite $(O; \vec{i})$ et le point F est sur la droite $(O; \vec{j})$.
   Pour un point $M(x, y)$ quelconque du plan, on considère le point H, projeté orthogonal de M sur la droite D.

   (a) Calculer MF^2 et MH^2 en fonction de x et y et en déduire une condition liant x et y pour que le point M soit équidistant de F et de D.

   (b) Donner alors une équation de G et conclure.

Production demandée

– Réaliser une figure adaptée à la situation ;

– Expressions de MF^2 et MH^2 ;

– Réponses argumentées pour la question 3b.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. On ouvre l'application Géométrie et on débute une nouvelle figure par « `Fich/Nouveau` ».

   On supprime au besoin l'affichage des axes et la grille des points entiers avec.

   On sélectionne l'icône (ou « `Tracé/Segment de droite` »), puis on marque deux points avec le stylet (automatiquement nommés A et B). Ces deux points représenteront pour nous la droite D (il est possible d'animer un point sur un segment, et pas sur une droite : c'est ce qui justifie notre choix).

   Avec (ou « `Tracé/Point` ») on crée un point (pour l'instant pas très éloigné de $[AB]$ car on va bientôt zoomer vers l'avant) et on le renomme en F.

   Toujours avec, on crée un point sur $[AB]$ (sélectionner l'icône, poser et glisser le stylet jusqu'à ce que $[AB]$ soit sélectionné, puis relever le stylet : le point est créé et il est lié au segment). On renomme ce point en H.

   Pour tracer la perpendiculaire en H au segment $[AB]$, on sélectionne ce point et cette droite, puis l'icône (ou la fonction « `Tracé/Construire/Perpendiculaire` »).

   On effectue maintenant un zoom vers l'avant (icône, ou « `Aff/Zoom avant` ») pour que les points A et B disparaissent de l'écran, nous donnant ainsi l'impression d'une droite D infinie. L'utilisation de permet ensuite de cadrer la figure "à la main".

   Si on juge que ça n'encombre pas la construction, on peut nommer les droites D, T (fig2).

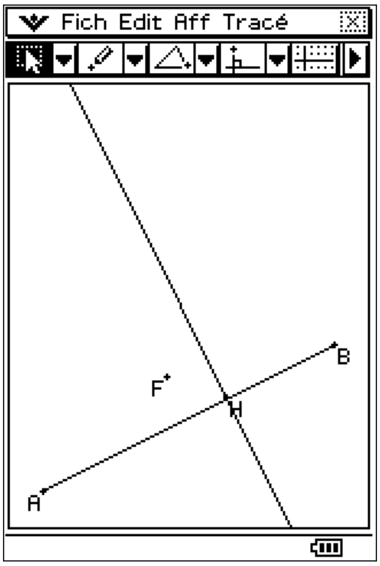

fig1 : la construction de base

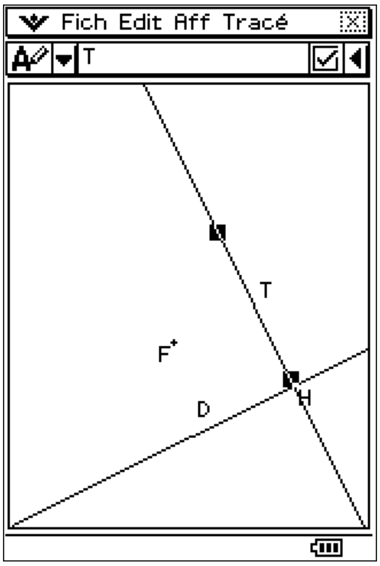

fig2 : on a nommé D et T

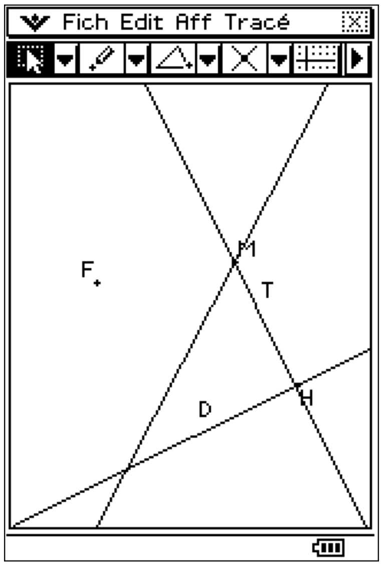

fig3 : $d(M, F) = d(M, H)$

2. Pour construire un point M de T équidistant de F et de H, on forme la médiatrice du segment $[FH]$.

   Pour cela, on sélectionne F et H puis (ou « `Tracé/Construire/Médiatrice` »).

   On sélectionne ensuite cette médiatrice et la droite T, puis on crée leur intersection avec (ou « `Tracé/Construire/Intersection` »). On renomme en M le point obtenu (fig3).

   On peut bien sûr modifier la position des points de base pour que la figure soit la plus lisible possible (sélectionner un point puis "tirer" la sélection avec le stylet).

Pour animer la figure, on anime H sur la droite D (c'est-à-dire sur le segment $[AB]$).

Pour cela, on sélectionne ce point et cette droite, et « `Edit/Animer/Ajouter Animation` ».

La fonction « `Edit/Animer/Editer Animations` » permet de paramétrer l'animation.

On peut ainsi fixer le nombre d'étapes (par exemple 50), les valeurs $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ indiquant ici que le point H va parcourir la totalité du segment auquel il est lié (fig4).

On ferme cette fenêtre par un appui sur (les modifications sont sauvegardées).

Pour tracer le lieu du point M quand H décrit la droite D, on sélectionne M puis la fonction « `Edit/Animer/Tracé` ».

On lance l'animation (« `Edit/Animer/Lancer (une fois)` ») pour observer qu'apparemment M décrit une parabole dont l'axe est orthogonal à D (fig5).

Il est intéressant de remarquer que la médiatrice de $[FH]$ semble être, en permanence, la tangente en M à cette parabole.

On peut modifier la position de F et relancer l'animation : le lieu précédent est effacé, puis le nouveau lieu de M est tracé (fig6).

On peut également modifier la droite D. Par exemple on peut modifier son coefficient directeur (appui sur puis trouver et modifier le champ). Sur l'exemple de la fig7, on a rendu la droite D horizontale avant de relancer l'animation.

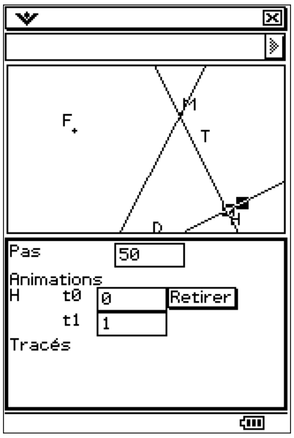

fig4 : 50 étapes

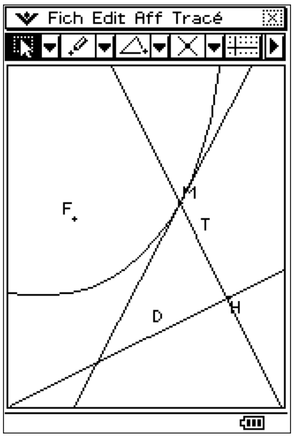

fig5 : le lieu de M

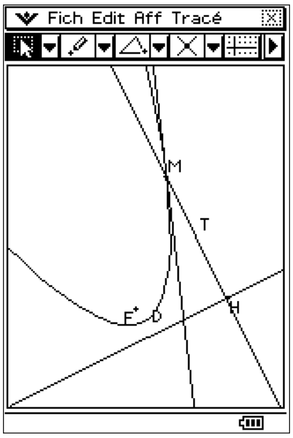

fig6 : on a déplacé F

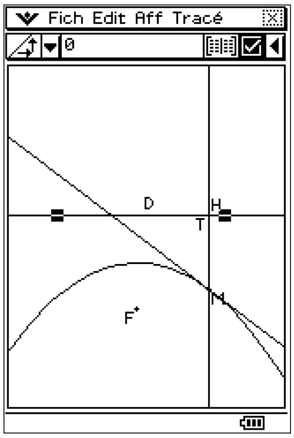

fig7 : on a modifié D

3. (a) Notons $(0, p)$ les coordonnées du point F.

   Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan. Son projeté orthogonal sur D est $H(x, 0)$.

   On a $MF^2 = x^2 + (y - p)^2$ et $MH^2 = y^2$.

   Le point M est donc équidistant de F et de D si et seulement si $x^2 + (y - p)^2 = y^2$.

   (b) L'égalité équivaut à $x^2 - 2py + p^2 = 0$, donc à $y = \dfrac{p}{2} + \dfrac{x^2}{2p}$: c'est l'équation de G.

   Quand M décrit la droite D, c'est-à-dire quand x décrit $\mathbb{R}$, on obtient effectivement une parabole G (d'axe vertical et de sommet le point $(0, p/2)$ dans notre repère).