Tétraèdre trirectangle

Énoncé

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O, on construit le tétraèdre $OABC$ avec : $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ et $C(0,0,2)$.

Ce tétraèdre est dit « trirectangle » car trois de ses faces sont des triangles rectangles.

Pour tout point M du segment $[AB]$, on construit le projeté orthogonal H du point O sur la droite (MC).

1. Proposer, à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, une figure traduisant la situation et construire le lieu des points H lorsque le point M décrit le segment $[AB]$.
   Quel semble être le lieu du point H ?

   > Appeler l'examinateur pour vérifier le tracé du lieu et la conjecture.

2. Conjecturer les positions du point M sur le segment $[AB]$ pour lesquelles la longueur CH semble maximale, minimale.

   > Appeler l'examinateur pour vérifier ces conjectures.

3. On se propose de démontrer les conjectures émises
   (a) Démontrer la double égalité : $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CO}^2$.

   > Appeler l'examinateur pour lui indiquer les stratégies retenues pour répondre aux questions (b) et (c) suivantes.

   (b) Valider ou invalider alors les conjectures faites à la question 2. Calculer les extremums de CH.
   (c) Le lieu de H est-il un arc de cercle ?

Production demandée

– Expression des conjectures des questions 1 et 2.

– Réponses argumentées à la question 3.

Proposition de corrigé avec le Classpad

◇ *Tracé de la figure avec Cabri-Géomètre 3D*

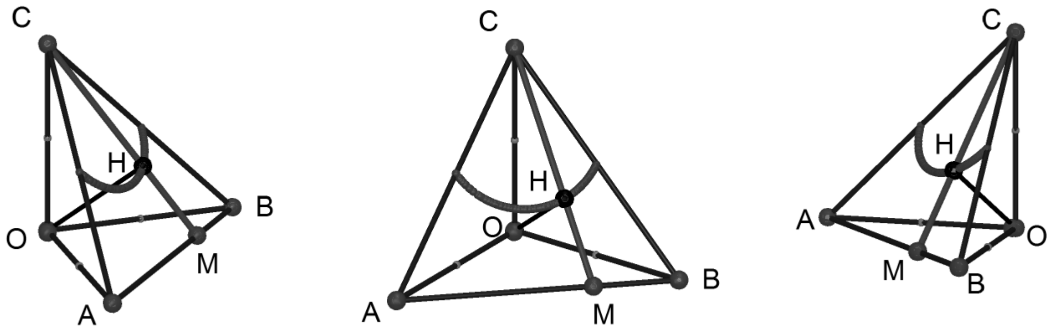
Le Classpad, comme toutes les calculatrices à ce jour, n'a pas de module de géométrie en 3D.

On pourrait sans doute effectuer une figure en perspective cavalière (comme dans le corrigé du sujet 029), mais nous préférons ici confier le soin de la représentation graphique à "Cabri-Géomètre 3D", un logiciel dont c'est la spécialité.

En revanche, nous allons utiliser les capacités de calcul formel du Classpad pour une approche plus calculatoire de l'exercice.

Voici pour commencer trois vues de la construction demandée par l'énoncé.

Lorsque M décrit le segment $[AB]$, il semble que le point H décrive un arc de cercle (mais est-ce *vraiment* un arc de cercle ? et si oui, pour quel angle au centre ?).



Trois vues différentes de la même construction

◇ *Utilisation d'une eActivité*

L'application "eActivity" du Classpad permet de créer des documents (des *eActivités*) faisant appels aux différentes applications (géométrie, tableur, calcul formel, etc).

Outre l'intérêt qu'il y a à faire coopérer plusieurs environnements dans un même document, une des qualités des eActivités est qu'elles sont pleinement éditables et qu'on peut les sauvegarder (contrairement aux calculs effectués dans l'application Principale).

On va donc former une eActivité, essentiellement pour résoudre l'exercice proposé à l'aide du calcul symbolique.

On ouvre donc l'application par un appui sur l'icône eActivity dans l'écran d'accueil du Classpad.

On débute une nouvelle eActivité par « `Fich/Nouveau` ». Chaque ligne à l'écran est soit un bandeau, soit un lien géométrique, soit une ligne de texte, soit une ligne de calcul. Nous n'utiliserons que ces deux dernières possibilités dans cet exercice.

Une ligne de texte peut-être transformée en ligne de calcul (ou inversement) par un appui sur l'icône ou sur l'icône .

Avec les icônes B ou **B**, une ligne de texte peut être écrite en caractères gras ou en caractères normaux (cette icône est grisée quand on est sur une ligne de calcul).

On peut toujours insérer une nouvelle ligne (de texte ou de calcul, pour ce qui nous concerne ici) avec les fonctions « `Ligne Calcul` » ou « `Ligne Texte` » du menu `Ins`.

La première instruction (`Clear_a_z`) est utile pour effacer toutes les variables dont le nom consiste en une seule lettre de notre alphabet.

Nous allons en effet utiliser des variables “muettes” pour désigner des paramètres (t ou u par exemple).

On définit ensuite les points de base O, A, B, C, sous la forme de vecteurs à trois composantes.

La définition du point O est facultative, mais elle apporte un peu plus d’homogénéité.

On définit ensuite M sur $[AB]$, en posant $M = A + \overrightarrow{AB}$.

Sur le Classpad, cela devient $M = A + t(B - A)$.

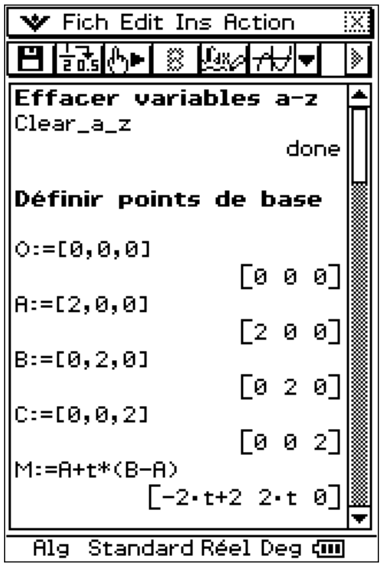


fig1

On en vient à la définition du point H sur le segment $[CM]$.

On pose donc $H = C + u(M - C)$.

H dépend donc pour l’instant des deux paramètres t et u.

Avec `dotP`, on forme le produit scalaire $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CM}$.

En résolvant par rapport à la variable u, on écrit que ce produit scalaire est nul, et on trouve $u = \dfrac{1}{2(t^2 - t + 1)}$.

On injecte cette valeur de u dans l’expression initiale de H, et on trouve les coordonnées de H en fonction de t (donc en fonction de la position du point M sur $[AB]$).

Ainsi $H = \left(\dfrac{1-t}{t^2 - t + 1}, \dfrac{t}{t^2 - t + 1}, \dfrac{2t^2 - 2t + 1}{t^2 - t + 1}\right)$

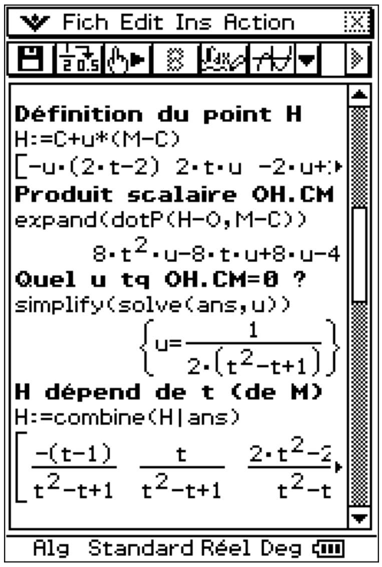


fig2

L’énoncé demande pour quelles positions de M la longueur du segment $[CH]$ est maximale ou minimale.

On calcule cette longueur CH avec l’instruction `norm`.

Le calcul de la dérivée de CH^2 fait clairement apparaître la valeur $t = 1/2$.

La fonction `fMin` nous indique que (pour $0 \leqslant t \leqslant 1$), la longueur CH est minimum quand $t = 0$ et quand $t = 1$, ce minimum valant $\sqrt{2}$.

De même, `fMax` nous indique (toujours pour $0 \leqslant t \leqslant 1$) que la longueur CH est maximum quand $t = 1/2$ et que ce maximum vaut $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

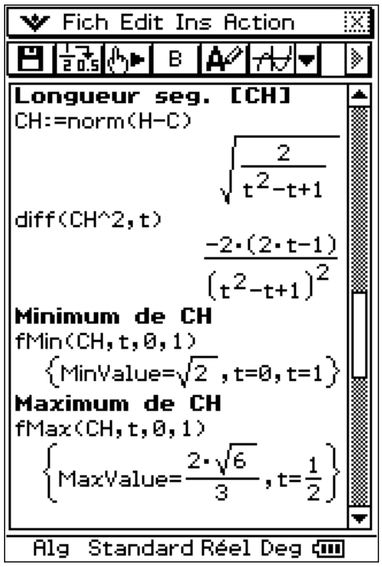


fig3

On forme maintenant les trois positions de H qui correspondent aux extrémums de la longueur CH.

Pour $t = 0$ (donc quand $M = A$), H est en $H_0 = (1, 0, 1)$.

Pour $t = 1$ (donc quand $M = B$), H est en $H_1 = (0, 1, 1)$.

Pour $t = \dfrac{1}{2}$ ($M =$ milieu de $[AB]$) $H = H_m = \dfrac{2}{3}\Big(1, 1, 1\Big)$.

On vérifie ensuite les égalités $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CO}^2$.

Pour cela, on calcule séparément les trois expressions, avec les instructions `dotP` et `norm` (c'est intéressant mais ça ne vaut tout de même pas un raisonnement géométrique).

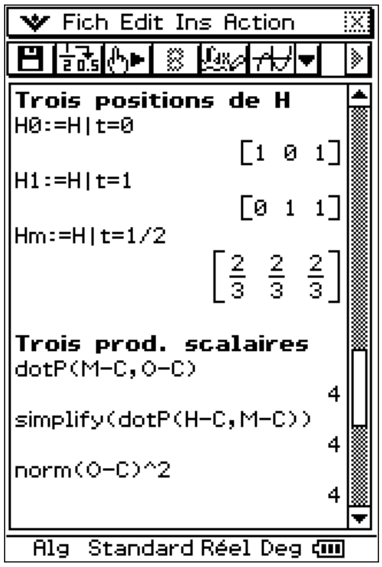


fig4

On sait que $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ donc H est sur la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[OC]$ (de centre $J(0, 0, 1)$ et de rayon 1).

On le vérifie très facilement en constatant que la distance de H au point $J(0, 0, 1)$ est en permanence égale à 1.

Mais H est aussi sur le plan (ABC).

Il est donc sur le cercle $\mathscr{C} = \mathscr{S} \cap (ABC)$.

On en trouve le centre K en projetant $(0, 0, 1)$ sur (ABC).

Pour cela, on a posé $K = (0, 0, 1) + w(1, 1, 1)$ (le vecteur $(1, 1, 1)$ est normal à (ABC)) puis cherché w pour que K soit dans (ABC) (d'équation $x + y + z = 2$).

On trouve $K = \left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$, et le rayon de $\mathscr{C}$ est $KH = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

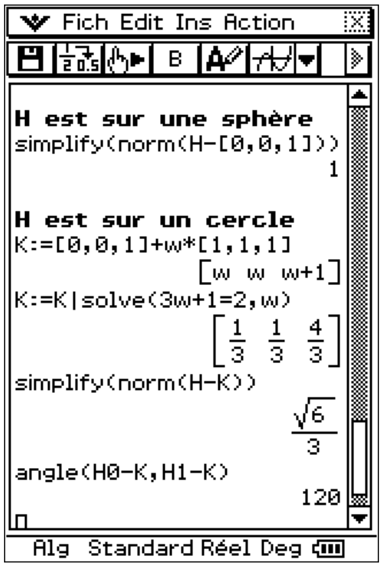


fig5

À la fin, on trouve $(\widehat{\overrightarrow{KH_0}, \overrightarrow{KH_1}}) = 120^\circ$. Comme il est clair que H prend toutes les positions sur l'arc de cercle $\mathscr{C}$ entre H_0 et H_1, cela signifie que H décrit un tiers de $\mathscr{C}$.

On réalise très facilement la figure ci-contre dans l'application géométrie du Classpad. Elle représente une coupe par le plan contenant C, O et M.

On y voit la projection orthogonale H de O sur $[CM]$, le point $J(0, 0, 1)$, et la longueur JH toujours égale à 1.

La longueur OM varie entre $\sqrt{2}$ et 2.

Les triangles rectangles COH et COM sont semblables.

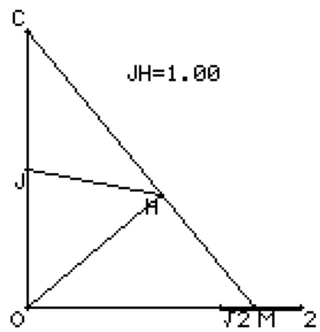


fig6

Ainsi $\dfrac{CH}{CO} = \dfrac{CO}{CM}$, donc $4 = CO^2 = CH \times CM = \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{CM}$.

Enfin $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CM} \cdot (\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HO}) = \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CH} = 4$ car $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{HO} = 0$.