Suite aléatoire

# Énoncé

On considère une suite $(S_n)$ définie par le lancer d'une pièce équilibrée de la façon suivante :

$$S_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} S_{n+1} = S_n + 1 & \text{si on obtient PILE} \\ S_{n+1} = S_n - 1 & \text{si on obtient FACE} \end{cases}$$

On note $A_n$ l'événement « obtenir $S_n = 0$ ».

On s'intéresse à la probabilité de réaliser l'événement $A_n$ pour un entier $n$ non nul donné.

## Étude expérimentale

1. En utilisant un tableur, effectuer une simulation donnant les 11 premiers termes de 1 000 suites définies de la même façon que $(S_n)$. Existe-t'il des valeurs de $n$ pour lesquelles l'événement $A_n$ est impossible ? Justifier votre réponse.

   Appeler l'examinateur pour présenter votre simulation et votre justification.

2. (a) Donner les fréquences d'apparition de l'événement $A_n$ pour $n$ variant de 1 à 10.

   (b) Faire d'autres simulations de même taille pour compléter le tableau suivant :

Fréquences d'apparition de $A_n$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Simulation n°1 | | | | | | | | | | |
| Simulation n°2 | | | | | | | | | | |
| Simulation n°3 | | | | | | | | | | |
| Simulation n°4 | | | | | | | | | | |
| Simulation n°5 | | | | | | | | | | |

Appeler l'examinateur pour une vérification.

## Étude mathématique

3. Déterminer les probabilités de réaliser les événements $A_2$, $A_4$ et $A_6$.

   Appeler l'examinateur pour une vérification.

4. Donner une expression de $p(A_n)$ en fonction de la parité de $n$.

## Production demandée

- Présentation orale des premiers termes des suites puis du tableau des fréquences des 5 simulations ;
- Calcul de $p(A_2)$, de $p(A_4)$ et de $p(A_6)$ ;
- Justification de la méthode de calcul de $p(A_n)$.

# Proposition de corrigé avec le Classpad

## Étude expérimentale

1. Avec le Classpad, `rand(0,1)` renvoie un entier pseudo-aléatoire égal à 0 ou 1.

   Dans ces conditions, `2rand(0,1)-1` renvoie un entier pseudo-aléatoire égal à $-1$ ou à 1 (chaque résultat avec la probabilité 1/2 a priori).

   On entre dans l'application "Tableur" (icône 
).

   On crée une nouvelle feuille de travail (« `Edit/Tout effacer` »).

   Le curseur étant sur la cellule `A1`, on y place la valeur 0, puis on positionne le curseur sur la cellule `B1` (juste à droite de `A1`).

   Dans le menu `Edit`, on sélectionne la fonction « `Remplir échelle` ».

   On place la formule `=A1+2rand(0,1)-1` dans la zone horizontale `B1:K1` (fig1).

   Par adressage relatif, on a donc calculé les onze premiers termes d'une suite $(S_n)$ (fig2).

   Remarque : pour que l'écran affiche le plus de valeurs possibles on a diminué la largeur des colonnes (faire « `Edit/Tout sélectionner` » puis « `Edit/Largeur de colonne` » puis régler la largeur de toutes les colonnes à 15). Pour voir les colonnes `I`, `J` et `K` qui sont encore masquées, il suffit de déplacer le curseur vers la droite de l'écran !

   On peut ensuite calculer une nouvelle suite $(S_n)$ avec « `Fich/Recalculer` » (fig3).

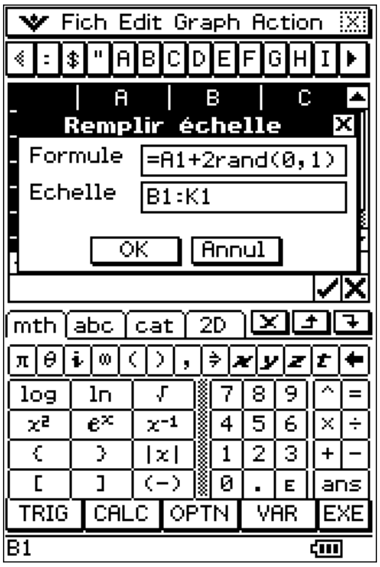


fig1 : on entre une formule $S_k = S_{k-1} + 2\text{rand}(0,1) - 1$

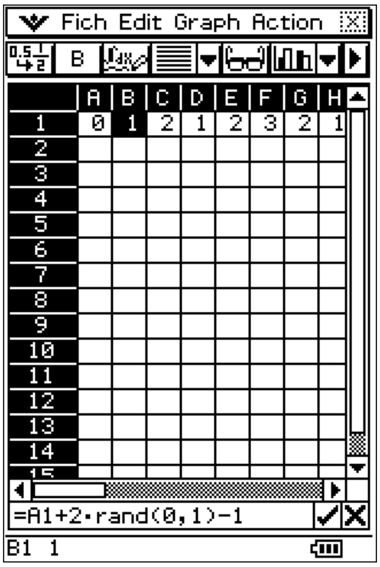


fig2 : les premiers termes d'une suite $(S_n)$

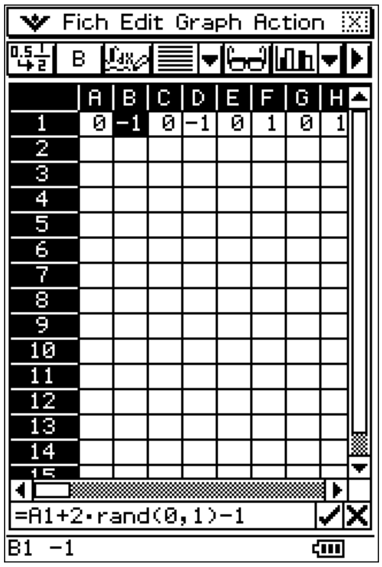


fig3 : nouvelle suite après « `Fich/Recalculer` »

   L'énoncé demande d'effectuer 1000 calculs simultanés de suites $(S_n)$. Cela excède un peu les capacités d'une calculatrice, fut-elle perfectionnée...

   Nous nous bornerons à calculer 100 suites $(S_n)$ simultanées, ce qui n'est déjà pas si mal !

   Pour créer ces 100 suites $(S_n)$, on va utiliser une méthode purement interactive, illustrant à merveille le confort que peut apporter l'utilisation du stylet.

– On pose la pointe du stylet sur le numéro de la ligne 1, tout à gauche de l'écran.
  Cela a pour effet de sélectionner la totalité de cette ligne.
– On pose le stylet sur la cellule `A1` (donc au début de la ligne sélectionnée), et on "tire" cette sélection vers le bas, avant de relever le stylet à la verticale de `A2`.
  À ce moment, les formules de la ligne 1 sont copiées sur la ligne 2.
  Cette dernière (qui contient les onze premiers termes d'une nouvelle suite $(S_n)$) est maintenant sélectionnée (fig4).
– On sélectionne alors simultanément les lignes 1 et 2 (poser le stylet sur le numéro 1 et le glisser jusqu'au numéro 2 avant de le relever).
  On repose alors le stylet sur la cellule `A1` et on tire cette sélection de deux lignes vers le bas, en relevant le stylet à la verticale de la cellule `A3`.
  À ce moment précis, les formules des lignes 1 et 2 sont copiées sur les lignes 3 et 4.
  Ces deux dernières (qui contiennent les onze premiers termes de deux nouvelles suites $(S_n)$) sont maintenant sélectionnées (fig5).
– Avec cette méthode, il est facile de copier les lignes 1 à 4 sur les lignes 5 à 8 (fig6).
  Précisons bien qu'il s'agit à chaque fois de copies de *formules* (seules les valeurs 0 situées en colonne `A` sont des données non calculées). On augmente donc, de copie en copie, le nombre de suites $(S_n)$ calculées simultanément.

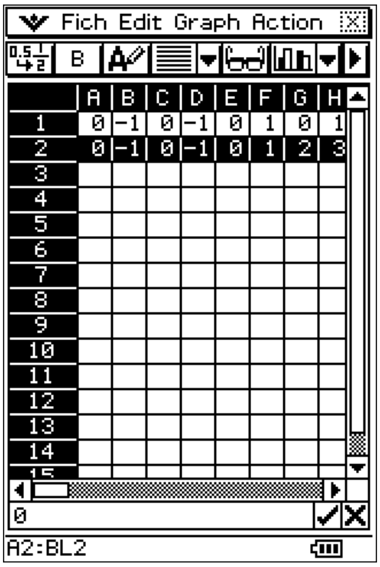

fig4 : une nouvelle ligne

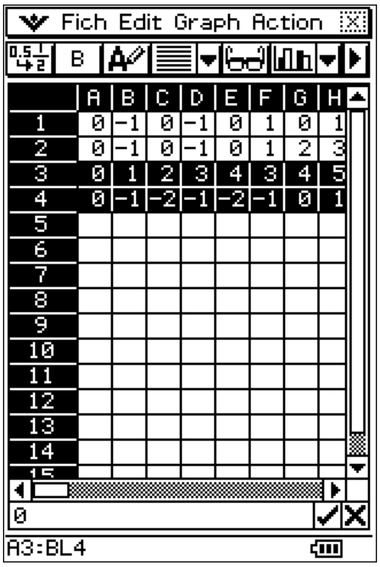

fig5 : deux nouvelles lignes

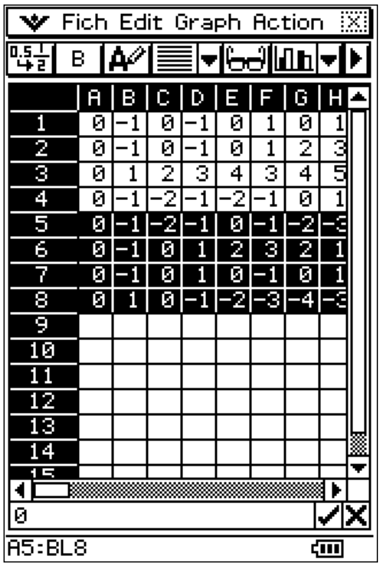

fig6 : quatre nouvelles lignes

On continue, on continue... On fabrique ainsi toujours plus de nouvelles suites $(S_n)$, en procédant par example par blocs de huit lignes, jusqu'à obtenir 100 lignes différentes, de la ligne 1 à la ligne 100 (fig7).

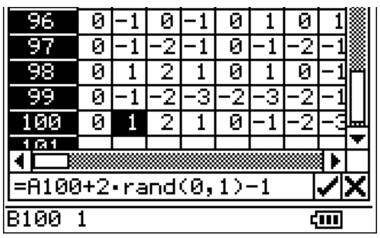

fig7 : 100 suites $(S_n)$

Il est clair que $S_n$ a toujours la parité de $n$ (car $S_0$ est pair, et il y a un changement de parité dans chaque passage de $S_n$ à $S_{n+1}$). Il en résulte que l'événement $A_n$ (c'est-à-dire l'égalité $S_n = 0$) est impossible si $n$ est impair.

2. (a) Pour notre simulation (calcul des 11 premiers termes de 100 suites simultanées) on va calculer les fréquences d'apparition de l'événement $A_n$ pour $n$ variant de 1 à 10.

   Il revient au même, dans chaque colonne (`B` pour l'événement $A_1$, `C` pour l'événement $A_2$, ..., `K` pour l'événement $A_{10}$) de calculer combien de cellules ont la valeur 0.

   Il y a une méthode extrêmement séduisante par sa simplicité.

   Il suffit en effet de sélectionner une colonne (toucher son nom avec le stylet) puis la fonction « `Type/Histogramme` » (ou, encore plus simple, l'icône ).

   Un histogramme apparaît alors, la hauteur de chaque barre étant fonction du nombre de valeurs qui appartiennent à la classe correspondante.

   Le Classpad crée ici au mieux les classes, toutes les valeurs étant prises en compte (réglages possibles dans « `Séries/Amp. classes` »).

   Il suffit de toucher une barre verticale avec le stylet pour voir affichés l'intervalle de la classe et le nombre de valeurs qui y appartiennent.

   On voit par exemple ce qu'on obtient en appliquant cette méthode aux colonnes `B` (fig8), `C` (fig9), `E` (fig10), `G` (fig11), `I` (fig12) et `K` (fig13).

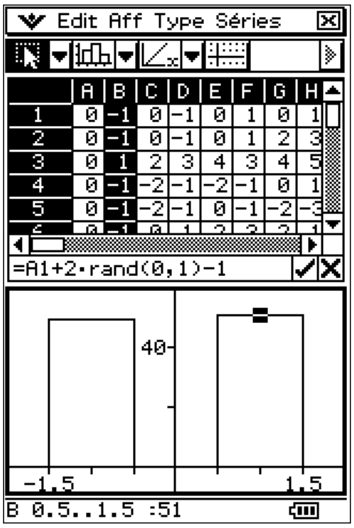


fig8 : événement $A_1$

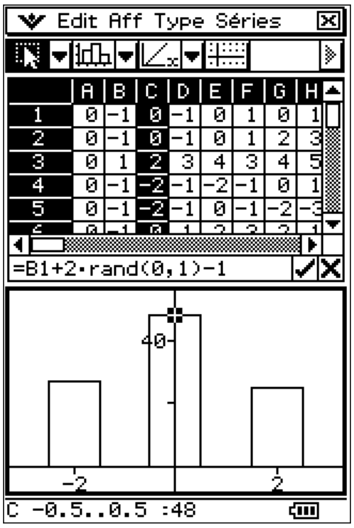


fig9 : événement $A_2$

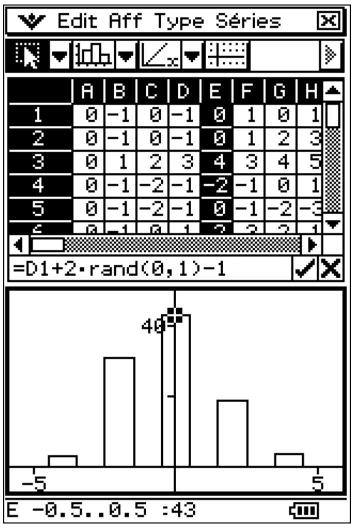


fig10 : événement $A_4$

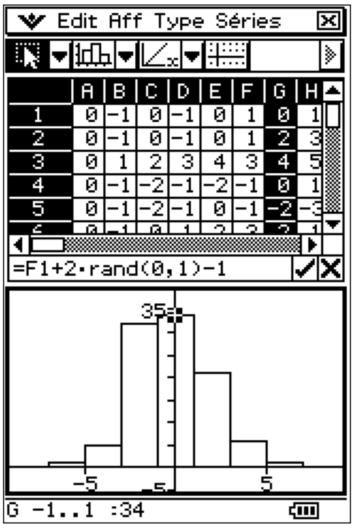


fig11 : événement $A_6$

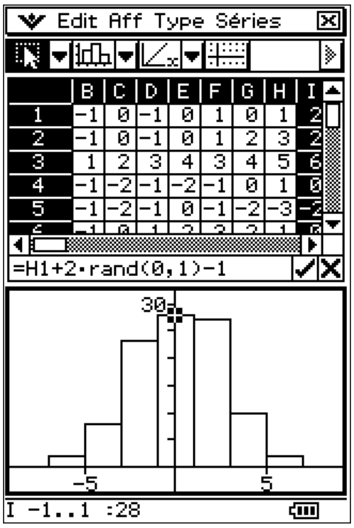


fig12 : événement $A_8$

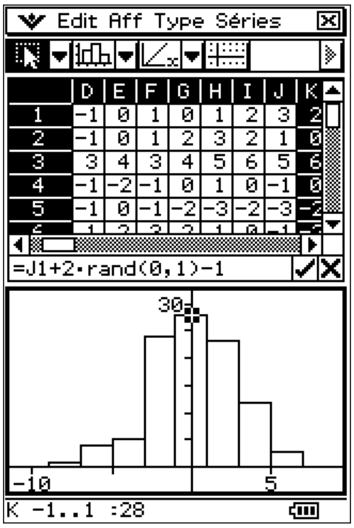


fig13 : événement $A_{10}$

Dans les exemples précédents, on a pointé à chaque fois la barre de l'histogramme correspondant à l'intervalle contenant la valeur 0 (et seulement elle parmi les valeurs possibles).
On a ainsi mesuré les effectifs pour les événements $A_1, A_2, A_4, \cdots, A_8, A_{10}$. Pour les événements $A_3, A_5, A_7$ et $A_9$, on sait qu'ils sont impossibles.

Puisqu'on a créé 100 suites simultanées, il suffit de diviser ces effectifs par 100 pour obtenir les fréquences correspondantes.

Pour cette première simulation, on a donc obtenu les fréquences (voir fig8 à fig13) :

Fréquences d'apparition de $A_n$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Simulation n°1 | 0.00 | 0.48 | 0.00 | 0.43 | 0.00 | 0.35 | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.30 |

(b) Il suffit de rafraîchir la feuille de calcul (fonction « `Fich/Recalculer` ») pour créer une nouvelle simulation (donc pour former à nouveau 100 suites $(S_n)$).

À chaque fois, on relève les fréquences d'apparition.

On a ainsi relevé les résultats suivants :

Fréquences d'apparition de $A_n$

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Simulation n°1 | 0.00 | 0.48 | 0.00 | 0.43 | 0.00 | 0.35 | 0.00 | 0.30 | 0.00 | 0.30 |
| Simulation n°2 | 0.00 | 0.47 | 0.00 | 0.31 | 0.00 | 0.32 | 0.00 | 0.26 | 0.00 | 0.28 |
| Simulation n°3 | 0.00 | 0.61 | 0.00 | 0.45 | 0.00 | 0.39 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.23 |
| Simulation n°4 | 0.00 | 0.53 | 0.00 | 0.36 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.22 | 0.00 | 0.21 |
| Simulation n°5 | 0.00 | 0.46 | 0.00 | 0.31 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.28 | 0.00 | 0.35 |

## Étude mathématique

3. Dire que $A_2$ est réalisé, c'est dire que la pièce a renvoyé une fois pile (donc une fois face) au cours des deux lancers. La probabilité est $p(A_2) = \dfrac{1}{2}$ (sur les quatre issues équiprobables PP, FF, PF et FP, il y en a deux qui réalisent $A_2$).

   $A_4$ est réalisé si le nombre de "Pile" obtenus au bout de quatre lancers est égal à 2.

   $A_6$ est réalisé si le nombre de "Pile" obtenus au bout de six lancers est égal à 3.

   Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de paramètre 1/2 (en notant "succès", par exemple, le fait d'obtenir Pile). Les lancers successifs de la pièce étant indépendants, le nombre $X_n$ de "Pile" obtenus au cours de $n$ lancers suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, 1/2)$.

   Autrement dit, $p(X_n = k) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!2^n}$ pour tout $k$ de $\{0, 1, \ldots, n\}$.

   En particulier, $p(A_4) = p(X_4 = 2) = \dfrac{4!}{(2!)^2 2^4} = \dfrac{3}{8}$ et $p(A_6) = p(X_6 = 3) = \dfrac{6!}{(3!)^2 2^6} = \dfrac{5}{16}$.

   Plus généralement, on sait que $p(A_n) = 0$ si $n$ est impair.

   Si $n$ est pair ($n = 2m$), alors $p(A_{2m}) = p(X_{2m} = m) = \dfrac{(2m)!}{(m!)^2 4^m}$.

   On trouve en particulier $p(A_{10}) = \dfrac{63}{256} \approx 0.246$ (à rapprocher des fréquences observées dans la partie expérimentale).