Calcul approché d'une intégrale

Énoncé

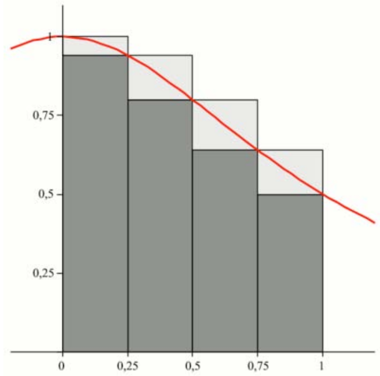
On considère l'intégrale $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, où la fonction f est définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. I est une intégrale dont on ne sait pas, en terminale S, calculer la valeur exacte.

Le but de l'exercice consiste donc à en déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Pour cela on convient d'appliquer une méthode dite des « rectangles » et de partager l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même amplitude, n étant un entier naturel non nul.

,

1. Dans cette question on donne à n la valeur 4.

   Quel encadrement de l'intégrale I le dessin ci-contre suggère-t'il ?

   Quelle est l'amplitude de cet encadrement ?

   Faire calculer cet encadrement par la calculatrice ou le tableur.

   > Appeler l'examinateur pour une vérification de l'encadrement trouvé.

2. On souhaite pouvoir généraliser, à n entier naturel non nul quelconque, l'encadrement obtenu dans le cas où $n = 4$.

   (a) Modifier l'organisation du calcul pour obtenir l'encadrement de I et son amplitude dans le cas où $n = 10$ puis où $n = 20$.

   > Appeler l'examinateur pour une vérification de l'automatisation effectuée.

   (b) Conjecturer une valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}.

   > Appeler l'examinateur pour lui indiquer la conjecture émise
   > et lui indiquer les méthodes envisagées pour la question suivante.

   (c) Proposer des éléments permettant de justifier que, pour la valeur trouvée en 2.(b), l'amplitude de l'encadrement est bien inférieure ou égale à 10^{-2}.

Production demandée

– Encadrements de I obtenus sur calculatrice ou tableur pour les valeurs de n demandées.

– Stratégie de démonstration du résultat conjecturé à la question 2.(b).

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. L'application f est décroissante sur $[0,1]$.

   Pour tout x de $\left[0,\dfrac{1}{4}\right]$, on a $f\left(\dfrac{1}{4}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$ donc $\dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{1}{4}\right) \leqslant \displaystyle\int_0^{1/4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{4}f(0)$.

   De même : $\dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqslant \displaystyle\int_{1/4}^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{1}{4}\right)$ et $\dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{3}{4}\right) \leqslant \displaystyle\int_{1/2}^{3/4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

   Enfin, on a l'encadrement : $\dfrac{1}{4}f(1) \leqslant \displaystyle\int_{3/4}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{4}f\left(\dfrac{3}{4}\right)$.

   Par addition terme à terme, il en résulte :

   $$\frac{1}{4}\left(f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)+f(1)\right) \leqslant I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4}\left(f(0)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)\right)$$

   On peut faire le calcul dans trois environnements différents du Classpad :

   – Dans l'application Principale, on définit $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et on calcule les sommes m et M qui encadrent l'intégrale de f sur $[0,1]$.
     On note que $m \approx 0.720294$, $M \approx 0.8452194$, et $M - m = \dfrac{1}{8}$ (fig1).

   – Dans Statistiques, on a posé `seq(k/4,k,0,3)` dans la case `Cal▸` de `list1`, puis `1/(1+list1^2)` dans celle de `list2`, puis `sum(list2)` dans la première cellule de `list3` (fig2).
     On a ainsi calculé le minorant m (pour calculer M, remplacer `seq(k/4,k,0,3)` par `seq(k/4,k,1,4)` dans la case `Cal▸` de `list1`).

   – Dans l'application Tableur, on a utilisé la fonction « `Edit/Remplir suite` » pour créer les valeurs $k/4$, de $k = 0$ à $k = 4$, dans les cellules `A2` à `A6`.
     On a ensuite utilisé la fonction « `Edit/Remplir échelle` » pour copier la formule `=1/(1+A2*A2)`, à partir de la cellule `B2` et jusqu'à la cellule `B6`.
     Enfin, on a placé `=sum(B3:B6)/4` dans `B8` et `=sum(B2:B5)/4` dans `B9` (fig3).

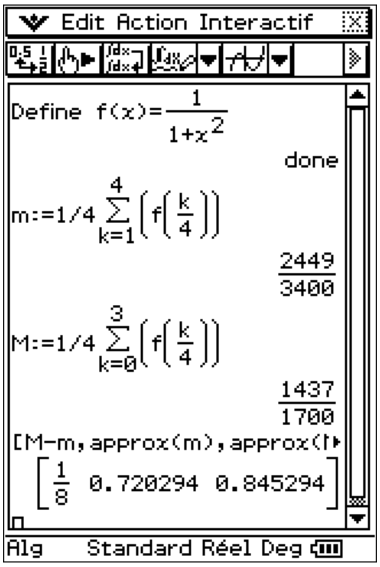


fig1 : dans Principale

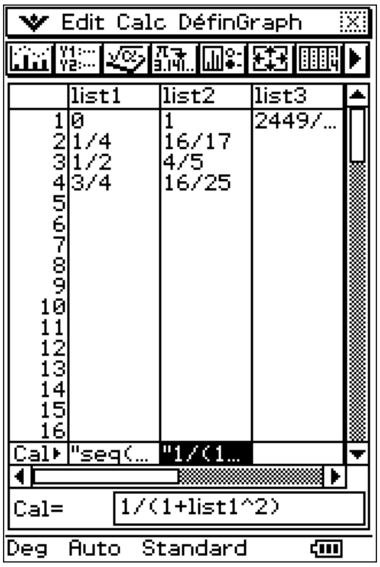


fig2 : dans Statistiques

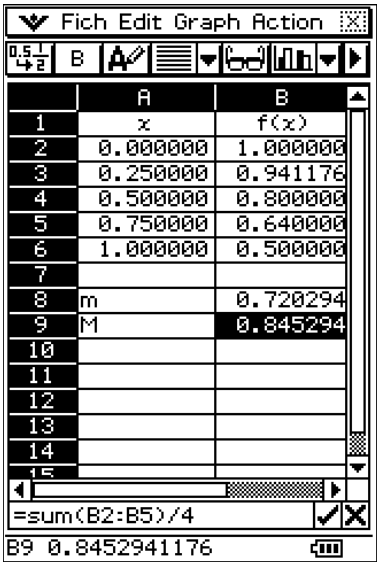


fig3 : dans Tableur

2. Il est facile de généraliser les calculs précédents pour d'autres valeurs que $n = 4$.

   Pour cela, on découpe $[0, 1]$ en les n sous-segments $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   L'application f est décroissante sur $[0, 1]$ donc sur chacun de ces n sous-segments.

   On en déduit $\frac{1}{n} f\Big(\frac{k+1}{n}\Big) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

   Par addition terme à terme, il en résulte : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$

   – Dans l'application Principale, on définit (outre l'application f) les deux applications m et M prenant en argument un entier n et calculant les termes de l'encadrement de l'intégrale de I quand on choisit de découper $[0, 1]$ en n segments.

     On voit en particulier les encadrements dans les cas $n = 10$ et $n = 20$ (fig4).

     L'intérêt de cette méthode est qu'elle reste très proche des calculs faits sur le papier.

   – Dans l'application Tableur, il n'est pas possible de créer les tables des valeurs de x_k et des $f(x_k)$ de façon dynamique en fonction d'un paramètre n.

     Il faut donc créer une feuille de calcul quand $n = 10$ puis la modifier (ou en écrire une autre) quand $n = 20$.

     Pour $n = 10$, par exemple, on a créé (avec « `Edit/Remplir suite` ») les valeurs k/n, de $k = 0$ à $k = 10$, dans les cellules `A2` à `A12`.

     On a ensuite utilisé la fonction « `Edit/Remplir échelle` » pour copier la formule `=1/(1+A2*A2)`, à partir de la cellule `B2` et jusqu'à la cellule `B12`.

     Enfin, on a placé `=sum(B3:B12)/10` dans `C2` et `=sum(B2:B11)/10` dans `C4` (fig5).

     On voit fig6 les calculs analogues dans le cas $n = 20$.

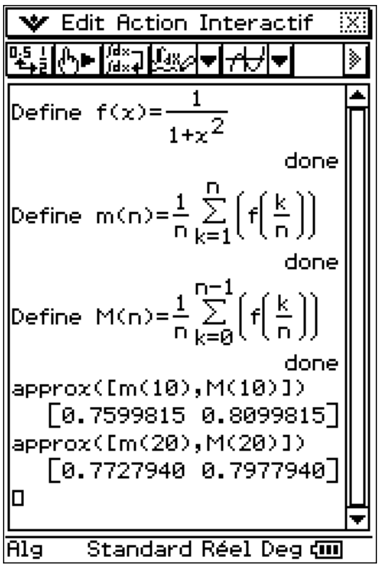
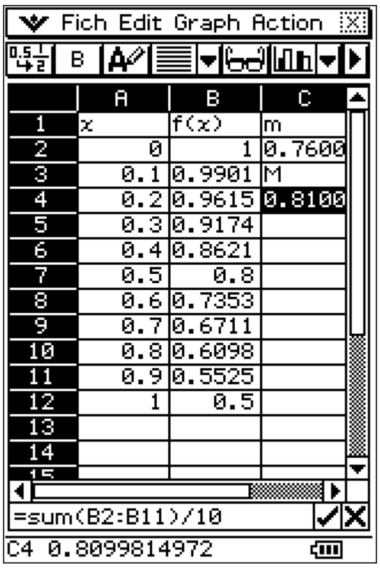
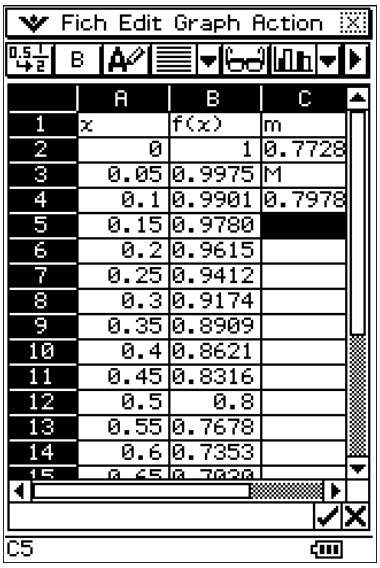


fig4 : dans Principale



	A	B	C
1	x	f(x)	m
2	0	1	0.7600
3	0.1	0.9901	M
4	0.2	0.9615	0.8100
5	0.3	0.9174	
6	0.4	0.8621	
7	0.5	0.8	
8	0.6	0.7353	
9	0.7	0.6711	
10	0.8	0.6098	
11	0.9	0.5525	
12	1	0.5	
13			
14			

fig5 : dans Tableur ($n = 10$)



	A	B	C
1	x	f(x)	m
2	0	1	0.7728
3	0.05	0.9975	M
4	0.1	0.9901	0.7978
5	0.15	0.9780	
6	0.2	0.9615	
7	0.25	0.9412	
8	0.3	0.9174	
9	0.35	0.8909	
10	0.4	0.8621	
11	0.45	0.8316	
12	0.5	0.8	
13	0.55	0.7678	
14	0.6	0.7353	

fig6 : dans Tableur ($n = 20$)

Pour conjecturer une valeur de n à partir de laquelle l'encadrement de I obtenu a une amplitude inférieure ou égale à 10^{-2}, le plus simple est d'utiliser les définitions vues précédemment dans l'application Principale.

On crée ici la fonction d qui prend en argument l'entier n et calcule l'amplitude de l'encadrement de l'intégrale I dans le cas de n sous-segments (on utilise pour cela les fonctions m et M définies précédemment).

On voit que l'amplitude $d(n)$ est une fonction décroissante de l'entier n (c'est rassurant), et qu'elle atteint la valeur 10^{-2} pour $n = 50$.

C'est donc à partir de cette valeur de l'entier n que la longueur de l'intervalle d'approximation de l'intégrale I est inférieure ou égale à 10^{-2}.

Remarque : les valeurs numériques ci-contre ont été obtenues par `approx` dans le mode `Standard`. On peut bien sûr se placer en mode `Décimal` (et se passer de `approx`).

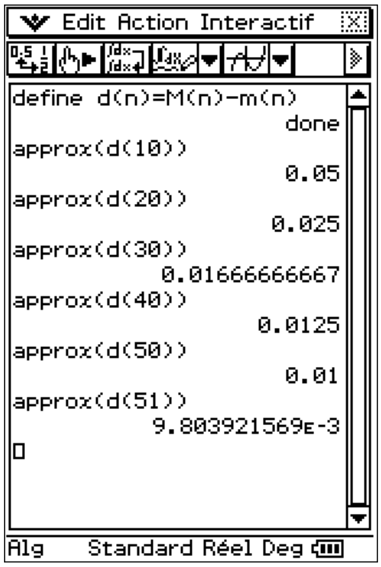


fig7

Il est facile de calculer l'amplitude de l'encadrement de I en fonction de n.

On a en effet $m_n \leqslant I \leqslant M_n$, avec $m_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Ainsi $M_n - m_n = \dfrac{1}{n}\left(f(0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) - \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1)\right) = \dfrac{f(0) - f(1)}{n} = \dfrac{1}{2n}$

On retrouve bien sûr : $0 \leqslant M_n - m_n \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2n} \leqslant 10^{-2} \Leftrightarrow n \geqslant 50$.

De même, c'est à partir de $n = 500$ que l'amplitude de l'intervalle d'approximation est inférieure ou égale à 10^{-3}.

Dans cette course à la précision, on est freiné par le nombre de termes à calculer et par les erreurs d'arrondi qui peuvent entacher les sommes calculées. Si on veut vraiment une approximation meilleure et à moindres frais, il faut se tourner vers d'autres méthodes classiques (au delà de la terminale) : méthodes des trapèzes, de Simpson, etc.

Une dernière remarque : on a évidemment $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \approx 0.7853981634$.