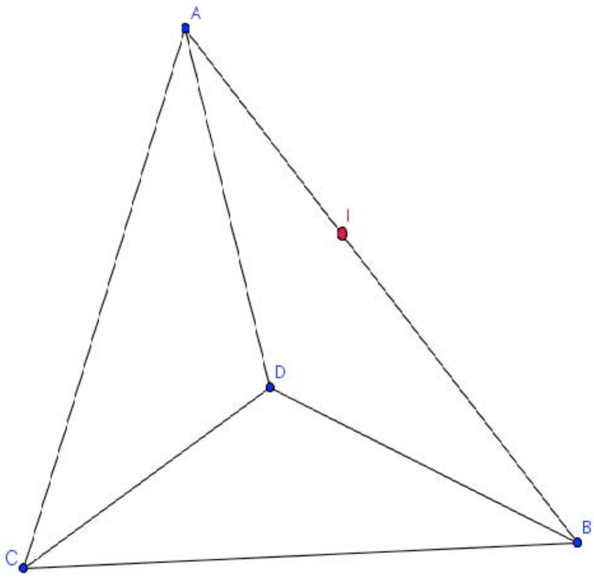
Étude de deux lieux géométriques

Énoncé



On considère un tétraèdre $ABCD$ et un point I quelconque du segment $[AB]$.
Le plan parallèle au plan (BCD) passant par I coupe la droite (AC) en J et la droite (AD) en K.
On désigne par L l'isobarycentre des trois points I, J et K.
On considère le point H projeté orthogonal du point C sur la droite (BL).
Le but de l'exercice est de déterminer le lieu géométrique du point L ainsi que celui du point H, lorsque le point I décrit le segment $[AB]$.

Expérimentation

1. Réaliser à l'aide d'un logiciel une figure géométrique correspondant à cette situation.
2. Visualiser quelques positions du point L pour des positions différentes du point I sur le segment$[AB]$.
   On aura intérêt à utiliser le mode « trace » si cette fonction est disponible dans le logiciel utilisé.
   Quel semble être le lieu géométrique du point L ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.

3. Visualiser quelques positions du point H pour des positions différentes du point I sur le segment $[AB]$. Quel semble être le lieu géométrique du point H ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture faite.

Démonstrations

4. Démontrer une des deux conjectures émises.

Production demandée

– Obtention à l'écran de la figure demandée dans les questions 2 et 3.
– Une des stratégies de démonstration prévues pour répondre à la question 4.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. *La figure avec Cabri-Géomètre 3D*

   Le Classpad ne possède pas d'application de géométrie en 3D.

   Pour la construction demandée par l'énoncé, on s'en remet ici à Cabri-Géomètre 3D.

   On voit ci-dessous (fig.a) une représentation du tétraèdre $ABCD$.

   On a formé le point I sur $[AB]$, puis les intersections J et K du plan parallèle à (BCD) et passant par I (plan non représenté ici) avec les segments $[AC]$ et $[AD]$.

   On a représenté le barycentre L du triangle IJK, et la droite (BL).

   On a ensuite formé le plan (non représenté ici) passant par C et orthogonal à (BL).

   L'intersection de ce plan avec la droite (BL) est le point H, dont on a formé le lieu quand I décrit $[AB]$. Il faut tourner autour de cette construction (avec l'outil "boule de verre" de Cabri3D) pour réaliser que le lieu de H ressemble à s'y méprendre à un arc de cercle.

   On a également représenté (c'est utile pour mieux comprendre la figure), le barycentre G du triangle BCD, le segment $[AG]$ (qui passe par L), et deux médianes du triangle BCD : la médiane BE issue de B et la médiane (DF) issue de D.

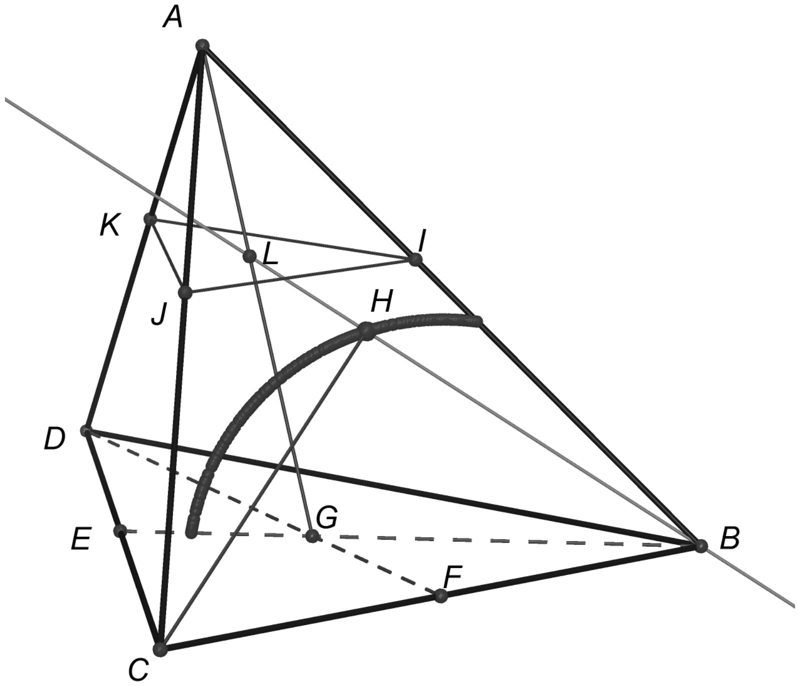


fig.a : la construction de l'énoncé, et le lieu du point H

Une observation attentive de la figure dans Cabri3D (il faut l'animer et varier les points de vue pour bien s'en rendre compte) montre que les extrémités du lieu de H sont :

– D'une part la projection orthogonale de C sur (BE) (quand I est en B).

– D'autre part la projection orthogonale de C sur (AB) (quand I est en A).

Voici d'ailleurs deux autres versions de la construction, près des cas limites :

– Figure b :
Le point I est proche de B : le point L est donc proche de G, et la projection orthogonale H du point C sur la droite (BL) est donc proche de la projection orthogonale (non représentée ici) de C sur la droite $(BG) = (BE)$.

– Figure c :
Le point I est proche de A : le point L est donc également proche de A, et la projection orthogonale H du point C sur la droite (BL) est proche de la projection orthogonale (non représentée ici) de C sur (BA).

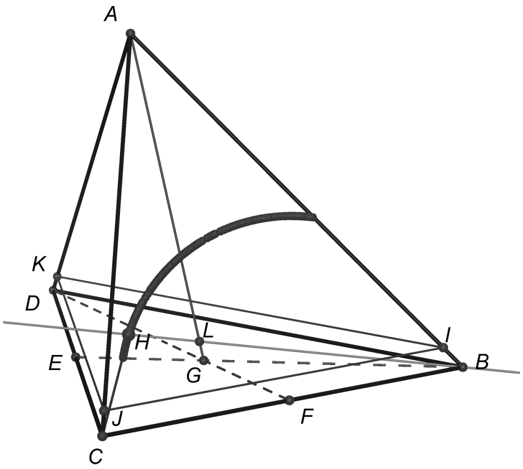


fig.b : I proche de B

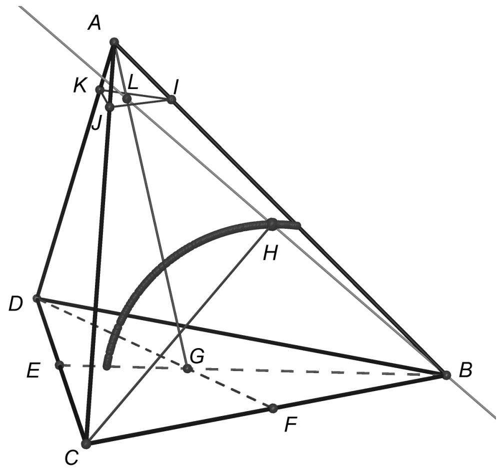


fig.c : I proche de A

2. *Le lieu du point L*

Posons $I = A + t(B - A)$, où $0 \leqslant t \leqslant 1$. Si on écarte la valeur $t = 0$ (donc $I = A$) cela signifie que I est l'image de B dans l'homothétie h de centre A et de rapport t.

L'homothétie h transforme le plan $\mathscr{P}_B = (BCD)$ en le plan $\mathscr{P}_I$ parallèle à (BCD) et passant par $h(B) = I$. Puisque C est à la fois sur la droite (AC) (invariante par h) et sur le plan $\mathscr{P}_B$, le point $h(C)$ est à l'intersection de (AC) et de $\mathscr{P}_I$, donc $h(C) = J$.

De la même manière, on a $h(D) = K$. Par conservation du barycentre, on en déduit que $h(G) = L$, où G est le barycentre de BCD et L celui de IJK.
Quand I varie sur $]A, B]$ (c'est-à-dire quand t parcourt $]0, 1]$), L parcourt donc $]A, G]$.

Bien sûr, si $t = 0$ (donc si $I = A$) on a $J = K = A$ donc $L = A$.

Conclusion : quand I décrit $[AB]$, le lieu de L est $[AG]$, où G est le barycentre de BCD.

3. *Le lieu du point H*

On a $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$, donc H est sur la sphère $\mathscr{S}$ de diamètre $[BC]$ (de centre F).

D'autre part, L est sur (AG). Le point H, qui est sur (BL), est donc dans le plan (BAG), c'est-à-dire le plan $\Pi = (BEA)$ où E est le milieu du segment $[CD]$.

Ainsi H est dans l'intersection du plan Π et de la sphère $\mathscr{S}$. Cette intersection est bien sûr un cercle $\mathscr{C}$. Le centre de $\mathscr{C}$ est la projection orthogonale de F sur le plan (Π).

Nous admettrons que le lieu de H est exactement un arc du cercle $\mathscr{C}$, arc délimité par les projections orthogonales de B sur (BE) et sur (BA).

4. *Une session de calcul formel*

Comme cela a été fait avec les sujets 29, 33 et 62, on va utiliser le calcul formel du Classpad pour une nouvelle approche de l'exercice, en écrivant une "eActivité".

Une première difficulté est que les coordonnées de A, B, C, D ne sont pas indiquées.

Nous allons leur imposer des valeurs très simples. Plus précisément, nous allons supposer que le repère $\mathscr{R}$ d'origine C et de base $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$ est orthonormé.

Les coordonnées des points A, B, C, D sont alors : $C(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$ et $A(0,0,1)$ (on impose donc à notre tétraèdre d'être *trirectangle*).

L'instruction (`Clear_a_z`) nous sert à effacer préventivement toutes les variables dont le nom est formé d'une seule lettre de notre alphabet.

Nous aurons en effet à utiliser des variables "muettes" : les paramètres t et u et les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'espace.

On définit ensuite les points de base C, B, D, A, sous la forme de vecteurs à trois composantes.

On définit un point I quelconque du segment $[AB]$.

Pour cela on pose $I = B + t(A–B)$ c'est-à-dire $I = B + t\overrightarrow{BA}$.

En particulier, l'ordonnée de I dans le repère $\mathscr{R}$ est t.

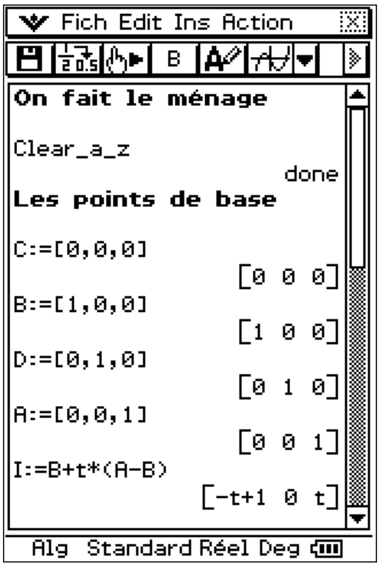


fig1 : les points de base

D'après Thalès, le plan parallèle à (BCD) et passant par I coupe (AC) en J tel que $\dfrac{CJ}{CA} = \dfrac{BI}{BA} = t$ donc $\overrightarrow{CJ} = t\overrightarrow{CA}$.

On trouve donc J en posant $J = C + t(A - C)$.

De même $K = D + t(A - D)$.

Il est normal que les points J, K aient pour ordonnée t.

En effet, le plan (BCD) a pour équation $z = 0$ dans $\mathscr{R}$.

Le plan parallèle à (BCD) et passant par $I(1 - t, 0, t)$ a donc pour équation $z = t$.

On définit ensuite le point L barycentre de I, J, K.

Puis on crée un point $H = B + u\overrightarrow{BL}$ quelconque de (BL).

On montre les coordonnées y, z de H, pour plus de lisibilité.

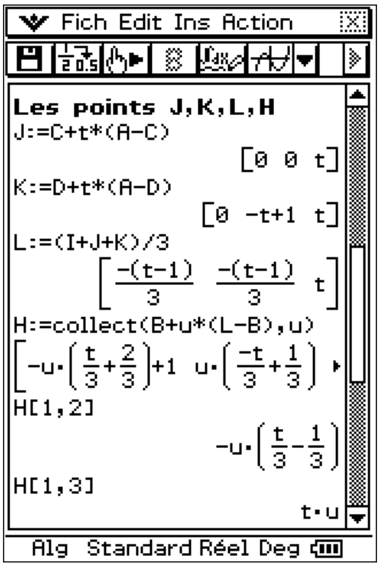


fig2 : les points J, K, L et début de la déf. de H

La caractéristique de H est qu'il est la projection orthogonale du point C sur (BL).

On forme le produit scalaire $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BL}$.

On cherche pour quelle valeur de u ce produit scalaire est nul.

On injecte cette valeur de u dans l'expression des coordonnées de H.

On obtient ainsi les coordonnées de H en fonction du paramètre t.

On crée ensuite le point F, milieu de $[BC]$.

On constate facilement que H est sur la sphère de centre F et de rayon $1/2$.

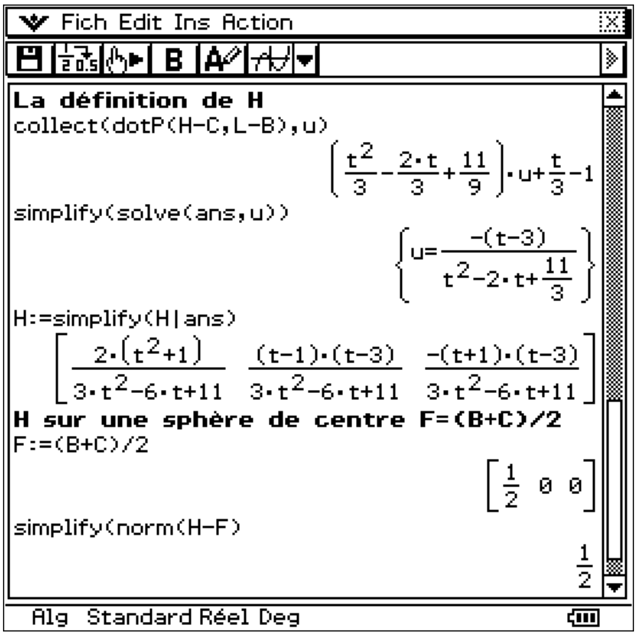


fig3 : les coordonnées de H en fonction de t

On va maintenant calculer les coordonnées du centre Q de l'arc de cercle décrit par H.

On sait que le point Q est la projection orthogonale de F sur le plan (BEA), où E est le milieu de $[CD]$

On commence par définir $E = (C + D)/2$.

Le plan (ABE), passant par $B(1, 0, 0)$, $E(0, 1/2, 0)$ et $A(0, 0, 1)$ a pour équation $x + 2y + z = 1$ (on encore $z = 1 - x - 2y$).

On définit ensuite $Q(x, y, z)$ comme un point quelconque de ce plan.

On cherche pour quel (x, y) les produits scalaires $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FQ} \cdot \overrightarrow{BE}$ sont nuls.

On obtient ainsi la projection orthogonale Q de F sur le plan (ABE), puis le rayon de l'arc de cercle décrit par le point H.

On calcule enfin les positions extrêmes de H, pour $t = 0$ et $t = 1$.

On peut ainsi déterminer l'angle au centre de l'arc de cercle décrit par H.

Voici qui termine une session de calcul formel assez convaincante.

On peut relancer les calculs en donnant d'autres coordonnées à B, D, A (mais en laissant C à l'origine).

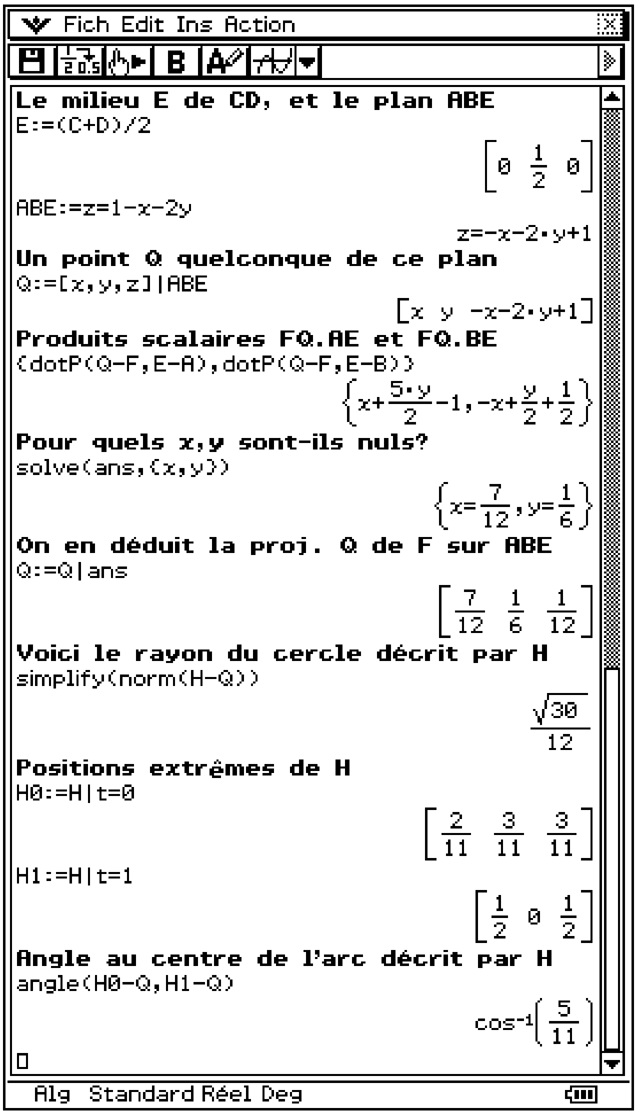


fig4 : centre et rayon de l'arc décrit par H