Étude du reste d'une division euclidienne

Énoncé

Pour tout entier naturel non nul n on considère les deux nombres entiers $N = 3n^2 - n + 1$ et $D = 2n - 1$.

Le but de l'exercice consiste à déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de N par D.

Expérimentation

1. Déterminer, à l'aide d'un logiciel, les valeurs du reste de la division euclidienne de N par D, pour toutes les valeurs de n comprises entre 1 et 50.
2. Représenter graphiquement ce reste en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la représentation obtenue.

3. Conjecturer, suivant les valeurs de n, l'expression du reste de la division enclidienne de N par D.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la conjecture trouvée.

Justifications

4. La conjecture formulée est-elle vraie ? Justifier.

Production demandée

- Obtention à l'écran de la représentation demandée dans la question 2. de la partie I.
- La conjecture faite dans la question 3. de la partie I.
- La stratégie prévue pour valider ou invalider la conjecture faite.

Proposition de corrigé avec le Classpad

Expérimentation

On va utiliser conjointement les applications Principale et Statistiques du Classpad.

Dans Principale, on définit les applications $n \mapsto N(n) = 3n^2 - n + 1$ et $n \mapsto D(n) = 2n - 1$.

On crée ensuite la liste E des 50 premiers entiers strictement positifs.

Les expressions `N(E)` (resp. `D(E)`) donnent alors les listes des cinquante premières valeurs de la fonction N (resp. D).

Très simplement, l'expression `mod(N(E),D(E))` renvoie le résultat demandé par l'énoncé, c'est-à-dire la liste R des cinquante premiers restes r_n dans la division de $N(n)$ par $D(n)$ (fig1).

On trouve donc $R = \{0, 2, 0, 3, 8, 4, 11, \ldots, 71, 25, 74, 26\}$.

Pour tracer le nuage des points (n, r_n), avec $1 \leqslant n \leqslant 50$, on ouvre (depuis l'application principale) une fenêtre sur l'application "Statistiques" (sélectionner l'icône).

Dans cette fenêtre, on fait place nette par « `Edit/Tout effacer` ».

Dans le haut de la première colonne (là où est écrit `list1`), on entre le nom `E`. De même, on remplace `list2` par `R`.

Les deux premières colonnes affichent alors respectivement les débuts de la liste `E` des 50 premiers entiers et de la liste `R` des cinquante premiers restes (fig2).

On sélectionne l'icône pour définir le tracé statistique `GraphStat1` (par exemple, car on peut aller jusqu'à `GraphStat9`).

On renseigne la fenêtre comme indiqué fig3 (ici, le dossier en cours est `sujet173`, et c'est dans ce dossier que sont les variables `E` et `R`).

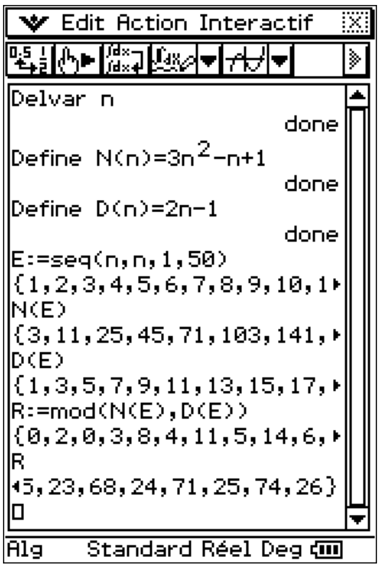

fig1 : les fonctions N et D et les listes E et R

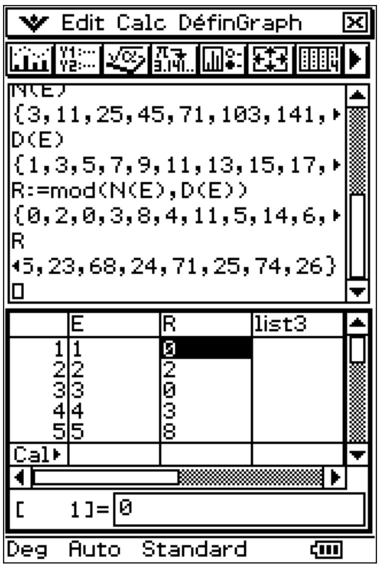

fig2 : affichage de E et R dans l'application Statistiques

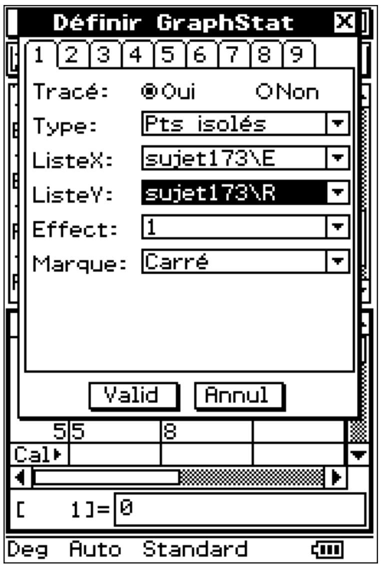

fig3 : définition du tracé statistique `GraphStat1`

Après avoir validé la fenêtre précédente, l'icône trace le nuage des points (n, r_n) (fig4).

On peut maximiser la fenêtre de tracé par `Resize` et cadrer au mieux le nuage au moyen d'un zoom boîte.

La première impression, un peu troublante, est qu'il y a deux nuages de points. On comprend mieux ce qui se passe en utilisant la fonction « `Analyse/Tracé` », qui permet de se déplacer de point en point le long du nuage.

On constate alors très vite qu'il y a deux cas, selon que l'entier n (qui est ici en abscisse) est pair ou impair. On s'est par exemple placé successivement sur le point $(23, 35)$ et sur le point $(24, 13)$ (voir fig5 et fig6).

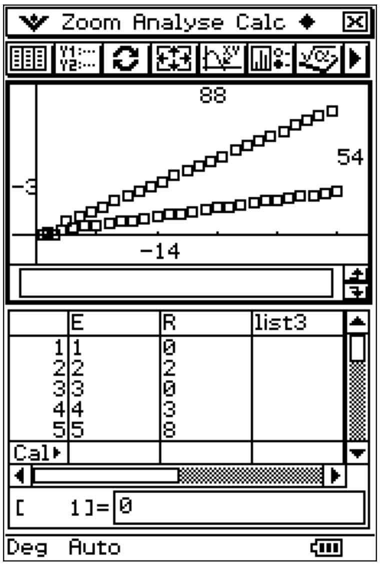

fig4 : Après appui sur

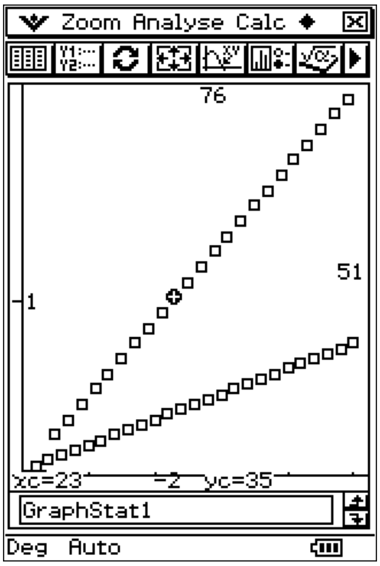

fig5 : sur le point $(23, 35)$

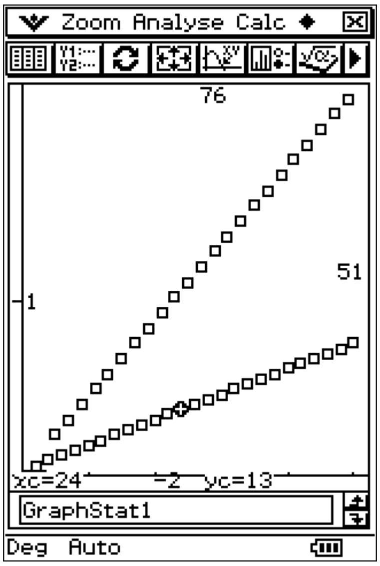

fig6 : sur le point $(24, 13)$

Pour confirmer l'impression, pour l'instant visuelle, que l'expression du reste r_n dépend de la parité de n, on revient dans l'application Principale.

On y retrouve les calculs effectués précédemment, et en particulier la définition des fonctions $n \mapsto N(n) = 3n^2 - n + 1$ et $n \mapsto D(n) = 2n - 1$.

On définit la liste `EP` (resp. `EI`) des 25 premiers entiers pairs (resp. impairs) strictement positifs.

On calcule ensuite les listes `RP` (resp. `RI`) des restes pour les entiers n de `EP` (resp. `EI`).

Pour les indices pairs $n = 2, 4, 6, 8 \ldots$ successifs, on trouve donc les restes $r_n = 2, 3, 4, 5, \ldots$

Enfin pour les indices impairs $n = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ successifs, on trouve les restes $r_n = 0, 0, 8, 11, 14, 17, \ldots$

On peut donc raisonnablement conjecturer les résultats suivants :

– Si $n = 2m$ (avec $m \geqslant 1$), $r_n = m + 1 = \dfrac{n}{2} + 1$

– Si $n = 2m - 1$ (avec $m \geqslant 3$), $r_n = 3m - 1 = \dfrac{3n + 1}{2}$

– Dans le cas impair, les cas $r_1 = r_3 = 0$ font exception.

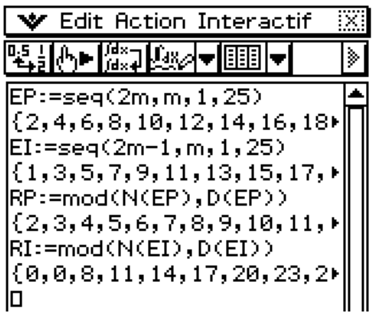

fig7 : les restes r_n dans les cas n pair et n impair

On obtient d'ailleurs facilement les expressions précédentes de r_n en fonction de n en traçant le nuage des points (n, r_n) dans le cas n pair d'abord, dans le cas n impair ensuite.

Pour n pair, on trace le nuage des listes `EP` et `RP` (voir méthode et calculs précédents). On définit une régression linéaire avec « `Cal/Reg. linéaire` » (disponible depuis la fenêtre "Statistiques" ou depuis la fenêtre de tracé du nuage de points).

On voit (dans le cas n pair) qu'une régression linéaire conduit à $y = x/2 + 1$ (avec un coefficient de corrélation égal à 1, ce qui signifie que le nuage de points est parfaitement aligné).

On retrouve ainsi la formule $r_n = \dfrac{n}{2} + 1$ si n est pair.

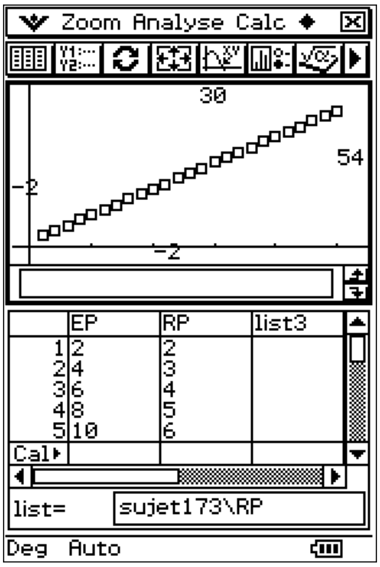

fig8

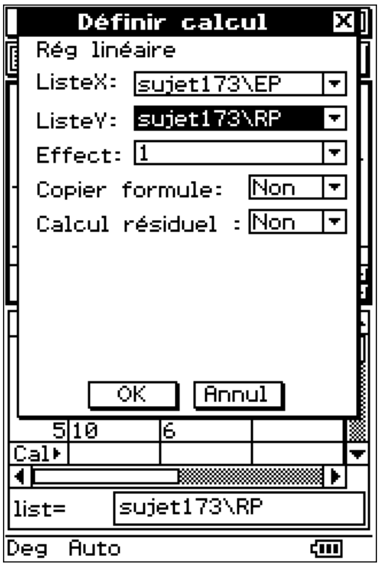

fig9

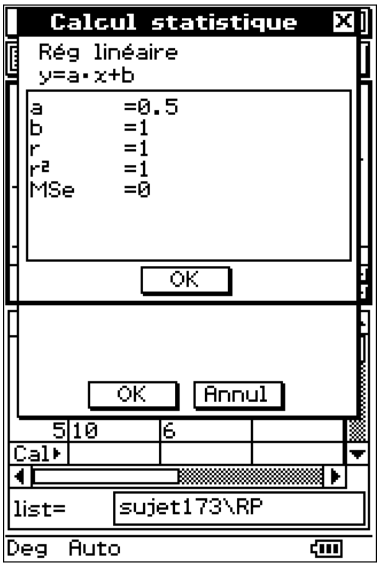

fig10

L'étude des restes r_n quand n est pair.

Pour n impair, il est préférable de modifier `EI` et `RI` en éliminant les couples exceptionnels $(1, r_1)$ et $(3, r_3)$ (supprimer quatre cellules dans l'écran "Statistiques").

Une régression linéaire donne la droite $y = \dfrac{3x+1}{2}$ donc la formule $r_n = \dfrac{3n+1}{2}$.

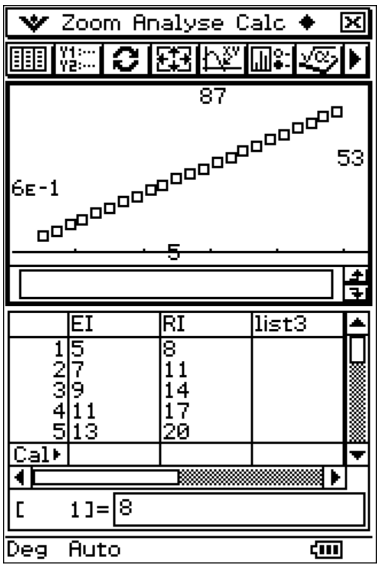

fig11

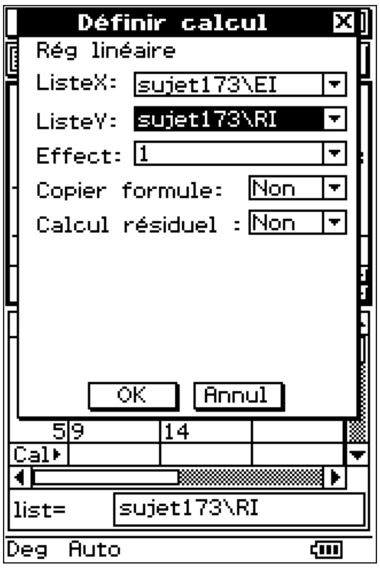

fig12

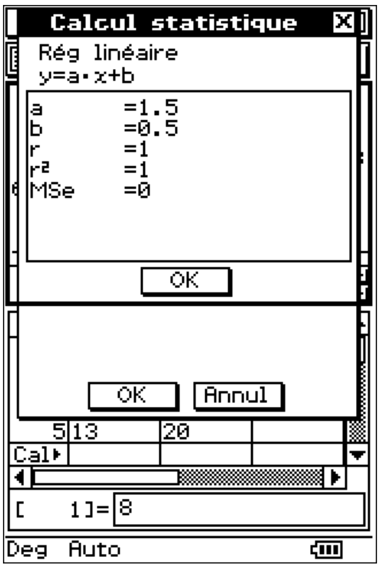

fig13

L'étude des restes r_n quand n est impair.

Justifications

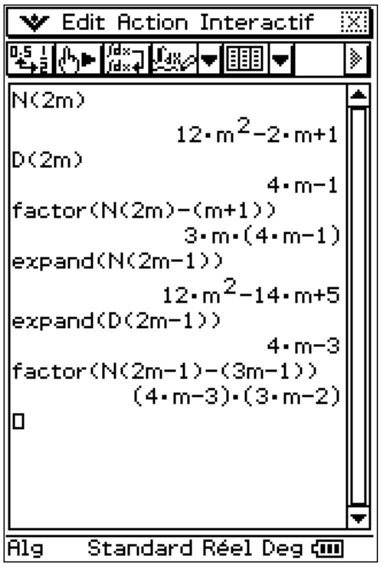

fig14 : vérification des résultats expérimentaux

On va s'aider du calcul formel du Classpad pour justifier les résultats précéents. On utilise encore les définitions des fonctions $n \mapsto N(n) = 3n^2 - n + 1$ et $n \mapsto D(n) = 2n - 1$.

On trouve $N(2m) = 12m^2 - 2m + 1$ et $D(2m) = 4m - 1$.

On constate que $N(2m) - (m + 1) = 3mD(2m)$.

Autrement dit, $N(n) = \dfrac{3n}{2}D(n) + \dfrac{n}{2} + 1$ si n est pair.

De même $N(2m-1) = 12m^2-14m+5$ et $D(2m-1) = 4m-3$.

On constate que $N(2m-1)-(3m-1) = (3m-2)D(2m-1)$.

Autrement dit, $N(n) = \dfrac{3n-1}{2}D(n) + \dfrac{3n+1}{2}$ si n est impair.

Nous pouvons maintenant résumer tout ça :

– Si n est pair ($n \geqslant 2$), on a $N(n) = q_nD(n) + r_n$ avec $q_n = \dfrac{3n}{2}$ et $r_n = \dfrac{n}{2} + 1 \geqslant 0$.
  On a : $D(n) - r_n = (2n-1) - \left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{3n-4}{2} > 0$, et il en résulte $0 \leqslant r_n < D(n)$.
  Autrement dit : si n est pair ($n \geqslant 2$), le reste dans la division de $N(n)$ par $D(n)$ est $r_n = \dfrac{n}{2}+1$.

– Si n est impair ($n \geqslant 1$), on a $N(n) = q_nD(n) + r_n$ avec $q_n = \dfrac{3n-1}{2}$ et $r_n = \dfrac{3n+1}{2} \geqslant 0$.
  On a : $D(n) - r_n = 2n - 1 - \left(\dfrac{3n+1}{2}\right) = \dfrac{n-3}{2}$.
  On voit qu'il faut supposer $n \geqslant 5$ pour avoir la double inégalité $0 \leqslant r_n < D(n)$.
  Donc, si n est impair ($n \geqslant 5$), le reste dans la division de $N(n)$ par $D(n)$ est $r_n = \dfrac{3n+1}{2}$.

– Il reste deux cas particuliers :
  $N(1) = 3$ et $D(1) = 1$ donc $r_1 = 0$, et $N(3) = 25$ et $D(3) = 5$ donc $r_3 = 0$.