Étude de lieux géométriques

Énoncé

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$. À tout point M du segment $[AB]$, on associe les points P et Q, projetés orthogonaux respectifs de M sur les droites (OA) et (OB), et les points R et S, sommets du carré $PRQS$ de diagonale $[PQ]$ tels que $(\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}) = \frac{\pi}{2}$. On note aussi I le milieu du segment $[PQ]$.

Le but de l'exercice est d'étudier les lieux des points R et S lorsque M décrit le segment $[AB]$.

1. (a) Réaliser une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la figure.

   (b) Visualiser les lieux des points R et S quand M décrit le segment $[AB]$, puis émettre une conjecture sur la nature de ces lieux.

   Appeler l'examinateur pour vérification de la conjecture.

   (c) Déterminer de manière expérimentale une équation du lieu du point S.

   Appeler l'examinateur pour vérifier la réponse et expliquer les manipulations effectuées.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier ces conjectures en se plaçant dans le plan complexe. On appelle x l'abscisse du point M, avec $x \in [0;1]$.

   (a) Montrer que l'affixe de M est : $x + i(1 - x)$.

   (b) Déterminer l'affixe de R ou celle de S. Justifier l'une des conjectures émises à la question 1.

Production demandée

– Visualisation à l'écran de la figure ;

– Démarches et réponses argumentées pour les questions 2.(a) et 2.(b).

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. On ouvre l'application Géométrie, et on fait place nette avec « `Fich/Nouveau` ».

   Avec , on cache les axes de coordonnées, et avec « `Aff/Grille entier` » on affiche la grille des points à coordonnées entières.

   On utilise deux fois la fonction « `Aff/Zoom avant` » (ou l'icône) pour se rapprocher un peu des points auxquels on va maintenant donner les noms O, A, B.

   On choisit l'icône (ou « `Tracé/Point` ») puis on crée les points $A(1, 0)$ puis $B(0, 1)$ (le nommage automatique des points par le Classpad nous convient ici parfaitement).

   On crée ensuite le point $O(0, 0)$ (le renommer en O avec puis).

   Avec (ou « `Tracé/Droite` ») on trace les droites (OA) et (OB), puis avec (ou « `Tracé/Segment` ») on trace le segment $[AB]$ (fig1).

   Le magnétisme des points à coordonnées entières à été ici utile pour créer ou sélectionner les points A, B, O avec précision, mais il ne faut plus maintenant conserver l'affichage de ces points (le magnétisme nous gênerait dans la définition de M). On "décoche" donc « `Aff/Grille entier` » pour que ces points ne soient plus visibles.

   Avec l'icône , on place un point sur le segment $[AB]$ (sélectionner d'abord l'icône, poser et glisser le stylet sur l'écran jusqu'à ce que $[AB]$ soit sélectionné, puis relever le stylet : le point est créé et il est lié à $[AB]$). On renomme en M le point obtenu.

   Pour construire la perpendiculaire à (OA) passant par M, on sélectionne ce point et cette droite avec le stylet, puis l'icône ou « `Tracé/Construire/perpendiculaire` ».

   On construit de même la perpendiculaire à (OB) passant par M.

   Pour créer les points P (resp. Q), on sélectionne les deux droites qui conviennent puis l'icône (ou « `Tracé/Construire/Intersection` »). Il faut bien sûr renommer en P et Q les deux points obtenus (fig2). On trace le segment $[PQ]$ avec .

   On peut cacher (MP) et (MQ) (les sélectionner puis « `Edit/Propriétés/Caché` »).

   Il est facile de centrer au mieux la construction avec l'icône (fig3).

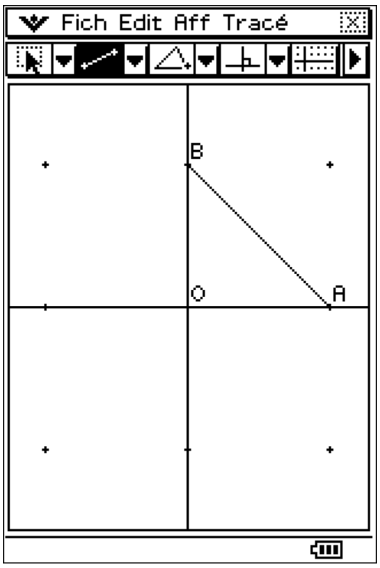

fig1 : les points O, A, B

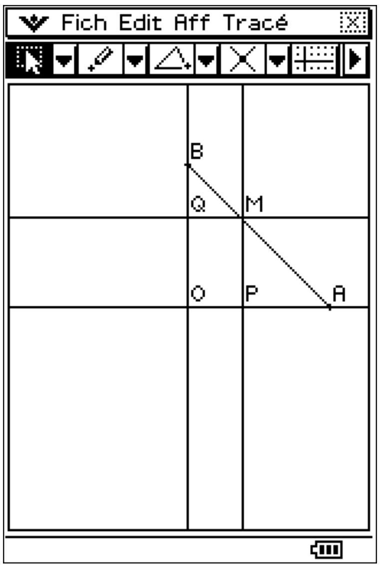

fig2 : les points M, P, Q

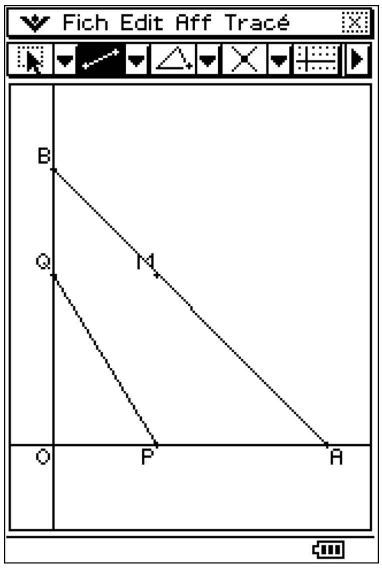

fig3 : après un recadrage

Pour construire le carré $PRQS$, on commence par tracer la médiatrice du segment $[PQ]$ (sélectionner ce segment puis utiliser ou « `Tracé/Construire/Médiatrice` »).

Pour plus de clarté, on crée le milieu J de $[PQ]$ (sélectionner $[PQ]$ puis choisir , ou bien sélectionner $[PQ]$ et la médiatrice et former leur intersection avec).

On crée ensuite le cercle de centre J et passant par P (choisir l'outil , glisser le curseur à l'écran jusqu'à ce que J soit sélectionné, relever le curseur et le reposer en glissant jusqu'à sélectionner P). L'outil permet de recentrer la construction (fig4).

On sélectionne maintenant simultanément la médiatrice de $[PQ]$ et le cercle de diamètre $[PQ]$ (glisser le stylet sur l'écran pour faciliter la sélection), puis on crée les deux points d'intersection avec (ou « `Tracé/Construire/Intersection` »).

On renomme en R et S les points obtenus, conformément à l'énoncé. On trace le carré $PRQS$ avec (ou « `Tracé/Polygone` »). Pour cela, on sélectionne successivement les quatre points, et le carré est tracé quand on revient au point de départ (fig5).

Pour rendre la figure plus lisible, on cache certains objets : le cercle de diamètre $[PQ]$, la médiatrice de $[PQ]$, le segment $[PQ]$ lui-même et son milieu J (fig6).

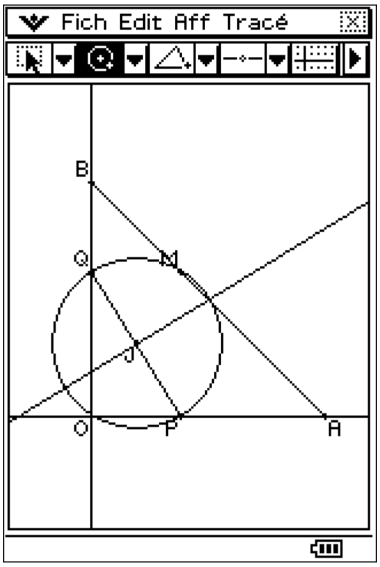

fig4 : la médiatrice de $[PQ]$, le cercle de diamètre $[PQ]$

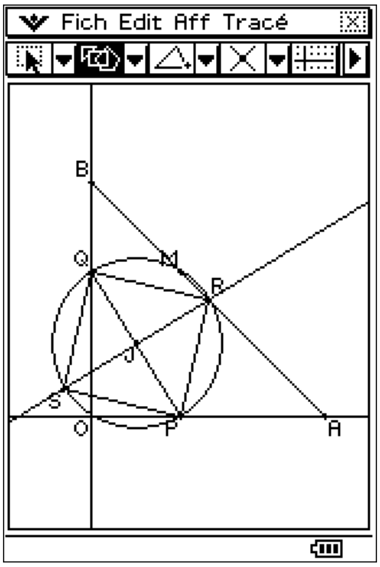

fig5 : le carré $PRQS$

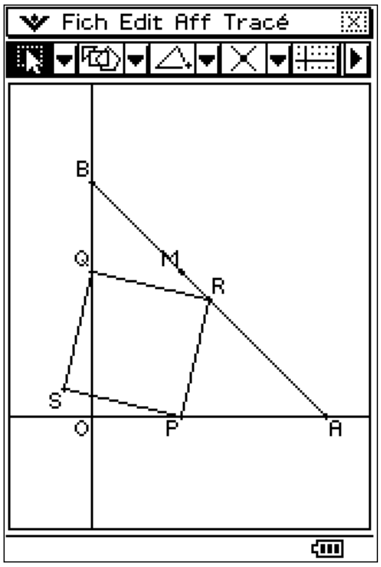

fig6 : après avoir caché les objets inutiles

On va maintenant animer la figure. Pour cela, on sélectionne le point M et le segment $[AB]$, et on choisit la fonction « `Edit/Animer/Ajouter animation` ».

La fonction « `Edit/Animer/Editer Animations` » affiche une fenêtre permettant de régler les paramètres de notre animation, notamment le nombre d'étapes.

Pour tracer le lieu de S et R quand M décrit le segment $[AB]$, on sélectionne ces deux points puis la fonction « `Edit/Animer/Tracé` ».

Il ne reste plus qu'à lancer l'animation (« `Edit/Animer/Lancer (une fois)` ») pour constater que S décrit le segment parallèle à $[AB]$ et de milieu O, alors que le point R semble rester fixe au milieu du segment $[AB]$ (fig7).

On peut également ouvrir le menu d'animation par « `Aff/Animation UI` ».

Avec le curseur , on peut se déplacer pas à pas dans l'animation, de $M = A$ à $M = B$, en passant par toutes les étapes intermédiaires (fig8 et 9).

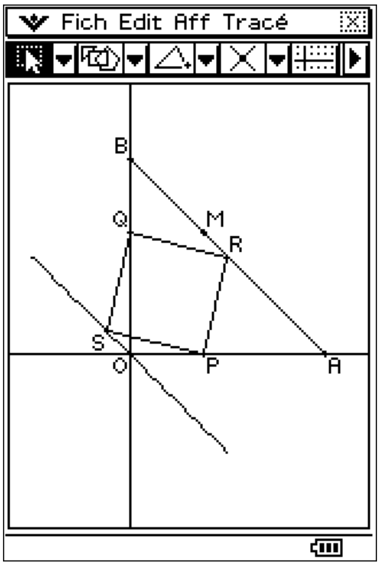

fig7 : le lieu du point S

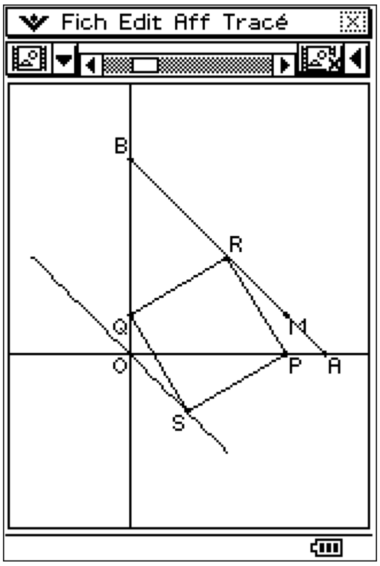

fig8 : étape de l'animation

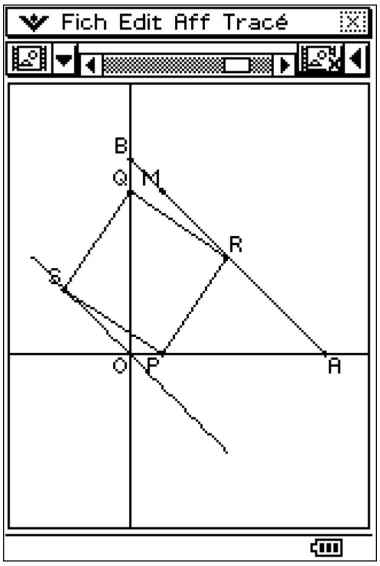

fig9 : une autre étape

Pour conjecturer le lieu de S, on l'a affiché en gras (« `Edit/Propriétés/Plus épais` »), puis on a tracé la droite $y = -x$ (« `Tracé/Fonction/f(x)` »). On voit bien que le lieu de S est la projection du segment $[AB]$ sur cette droite $y = -x$ (fig10).

2. Le point M est sur la droite (AB) dont l'équation est $Y = 1 - X$. Ses coordonnées sont donc $(x, 1 - x)$, et son affixe est $m = x + i(1 - x)$.

   Dans l'application Principale, on crée les affixes m de M, $p = x$ de P, et $q = i(1 - x)$ de Q.

   On calcule l'affixe r de R (resp. l'affixe s de S) en écrivant qu'il est l'image de P (resp. Q) dans la similitude directe de rapport $1/\sqrt{2}$, d'angle $\pi/4$ et de centre Q (resp. P).

   On trouve $r = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}$, ce qui prouve que R reste fixe au milieu de $[AB]$ (fig11).

   On trouve également $s = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(1 - i)$, ce qui équivaut à $\overrightarrow{OS} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\overrightarrow{BA}$ (fig12).

   Quand x décrit $[0, 1]$, M décrit donc $[B'A']$ avec $\overrightarrow{OB'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

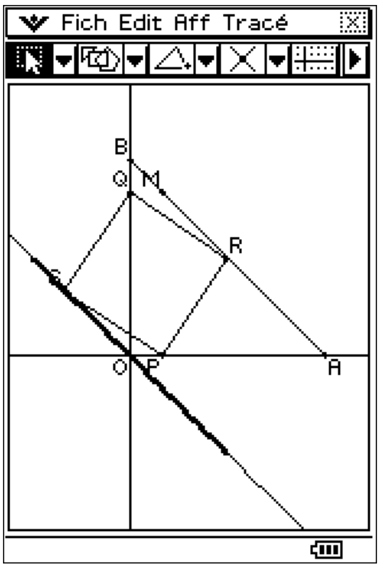

fig10 : S sur $y = -x$

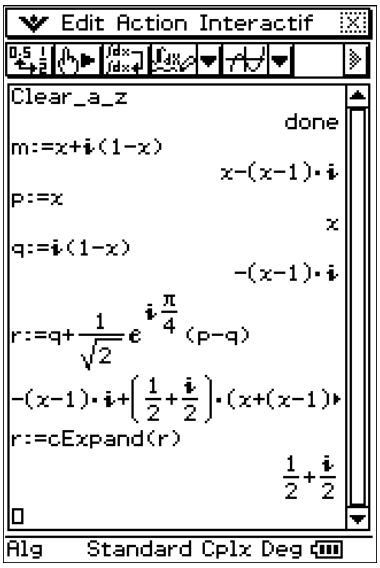

fig11 : le point R est fixe

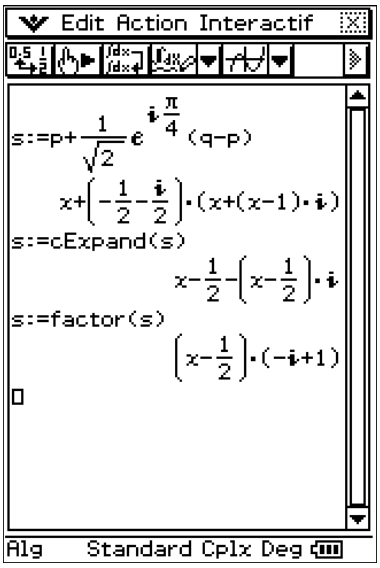

fig12 : l'affixe de S