

## Triangle inscrit dans une courbe donnée

## Énoncé

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  la courbe d'équation  $y = \frac{1}{x}$ .

On désigne par  $a, b, c$  trois réels non nuls, deux à deux distincts, puis par  $A, B, C$  les points de  $\mathcal{C}$  d'abscisses respectives  $a, b, c$ .

Le point  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

On appelle  $\mathcal{C}$  le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ , son centre est le point  $E$ .

Le point  $D$  est le symétrique du point  $H$  par rapport à  $O$ .

Le but de l'exercice est d'observer la position de certains points de la figure et d'étudier celle du point  $H$ .

1. (a) Construire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie.

Appeler l'examineur pour lui montrer la figure construite.

- (b) Faire varier  $a, b, c$  et émettre une ou deux conjectures concernant :
  - la position du point  $H$  ;
  - la position du point  $D$ .

Appeler l'examineur pour vérifier les conjectures.

- (c) À l'aide de manipulations appropriées, émettre une conjecture sur les ordonnées des points  $D$  et  $H$  en fonction de  $a, b, c$ , puis sur l'abscisse de  $H$ .


Appeler l'examineur pour vérifier la conjecture.


2. Démontrer la conjecture émise sur les coordonnées du point  $H$ .
3. Proposer une démarche permettant de démontrer la (ou les) conjecture(s) faite(s) pour le point  $D$  (on ne demande pas les calculs mais uniquement le plan proposé).

## Production demandée


- Figure réalisée avec le logiciel de géométrie.
- Démarches et réponses argumentées pour les questions 2. et 3.

## Proposition de corrigé avec le Classpad




- On ouvre l'application  et on débute une nouvelle figure par « Fich/Nouveau ».
 

On peut afficher les axes avec . En tout cas on désactive l'affichage de la grille des points à coordonnées entières (« Aff/Grille entier » : la case doit être « décochée »).


On trace l'hyperbole d'équation  $y = 1/x$ , avec « Tracé/Fonction/f(x) ».

On choisit  (ou « Tracé/Point ») et on glisse le stylet à l'écran jusqu'à sélectionner la courbe. On relâche le stylet : un point  $A$  est créé et lié à cette courbe.


On crée de même un point  $B$  et un point  $C$  sur cette courbe (le nommage automatique des points par le Classpad nous arrange ici).


On crée un point en  $(0,0)$  que l'on renomme en  $O$  ( puis ). Pour plus de confort, on peut afficher provisoirement la grille des points entières avec  (mais ne pas l'afficher pendant la création de  $A, B, C$  pour choisir ces trois points en toute liberté).



On peut modifier la position des points  $A, B, C$  sur la courbe  $y = 1/x$  (sélectionner un point, relever le stylet, le poser à nouveau sur le point sélectionné, le « tirer » sur l'écran puis relever le stylet : le point se déplace mais reste lié à la courbe).

On trace enfin le triangle  $ABC$  (utiliser  qui permet de tracer un polygone fermé quelconque : le polygone est terminé quand on revient au point de départ).

On voit (fig1) quel peut être l'état actuel de la construction.

Pour créer l'orthocentre de  $ABC$ , on commence par tracer deux hauteurs (sélectionner un sommet et le coté opposé, puis  ou « Tracé/Construire/Perpendiculaire »).

On sélectionne ces hauteurs puis on crée leur intersection (avec l'icône  ou la fonction « Tracé/Construire/Intersection »). On renomme en  $H$  le point obtenu (fig2).

Il semble que  $H$  soit sur l'hyperbole. On peut y voir plus clair en supprimant l'affichage des axes par , en cachant les hauteurs (les sélectionner puis « Edit/Propriétés/Caché ») et en recadrant la figure avec  ou « Aff/Zoom plein écran » (fig3).

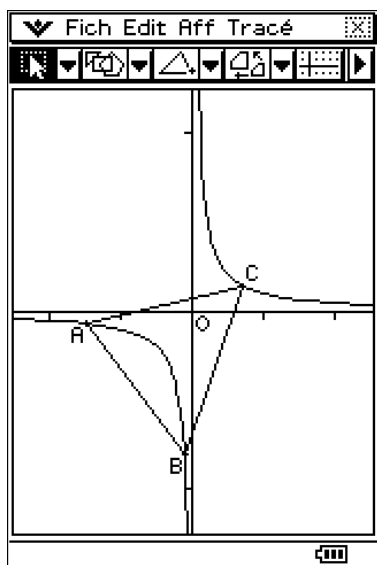


fig1 : le triangle  $ABC$   
inscrit dans l'hyperbole

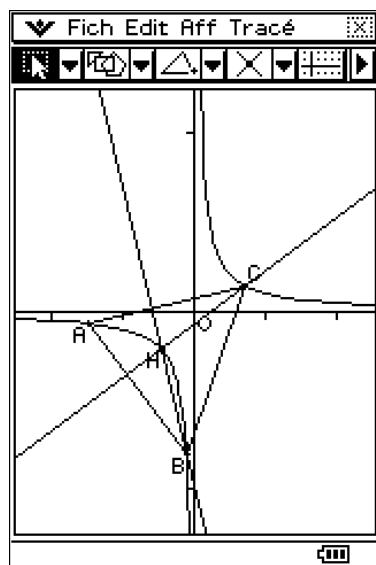


fig2 : l'orthocentre  $H$   
du triangle  $ABC$

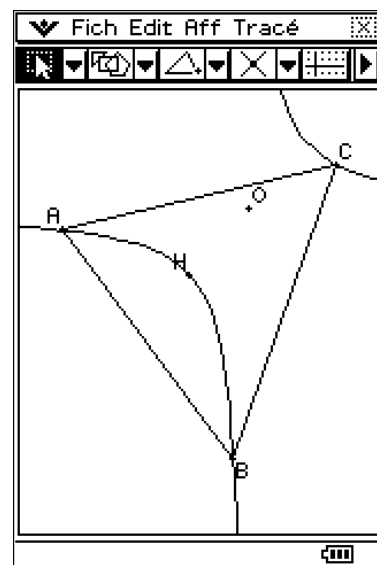




fig3 : une vue un peu plus  
dégagée, après recadrage

Pour créer le centre du cercle circonscrit, on trace deux médiatrices (sélectionner un coté, puis  ou « Tracé/Construire/Médiatrice »). On crée l'intersection de ces deux droites, et on renomme en  $E$  le point obtenu (fig4).

Là encore, on peut alléger la figure en cachant les deux médiatrices.

On trace le cercle circonscrit au triangle  $ABC$  (fig5 : choisir  ou « Tracé/Cercle », puis sélectionner  $E$  et enfin l'un des trois points  $A, B, C$ ).

On va construire  $D$  comme l'image de  $H$  dans l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $-1$ . On sélectionne donc  $H$  puis « Tracé/Construire/Dilatation » (ou ). On sélectionne ensuite  $O$  (le centre de l'homothétie) et on indique (dans la fenêtre qui s'ouvre alors) que le rapport de cette homothétie vaut  $-1$ .

On renomme en  $D$  le point obtenu : il semble qu'il soit sur le cercle circonscrit (fig6).

Remarque : si  $H$  est sur l'hyperbole (de centre  $O$ ) il est normal que  $D$  y soit aussi !

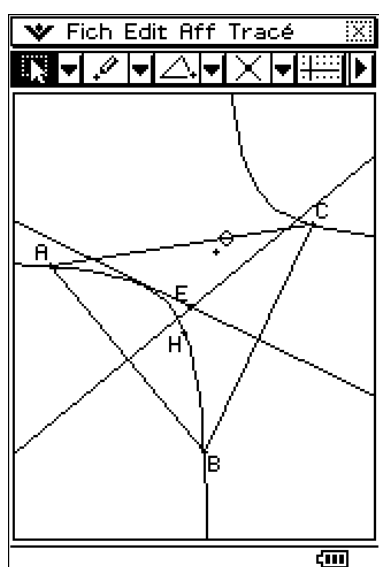


fig4 : le point d'intersection  $E$  des médiatrices

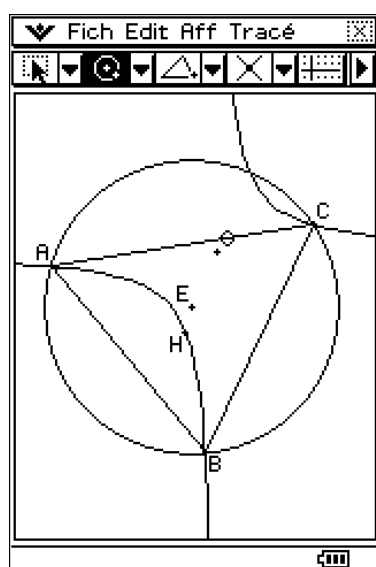


fig5 : le cercle circonscrit au triangle  $ABC$

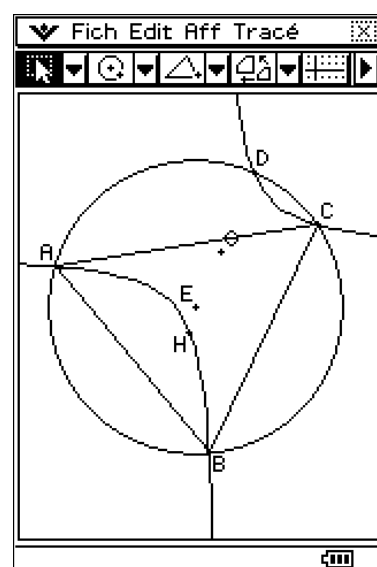




fig6 : le symétrique  $D$  de  $H$  par rapport à  $O$

On peut modifier la position des points  $A, B, C$  sur l'hyperbole (pour cela on sélectionne un point puis on le "tire" avec le stylet : ce point est déplacé à sa nouvelle position mais il reste lié à l'hyperbole).

On peut même faire passer un point d'une branche de l'hyperbole à une autre !

On a représenté ci-après (fig7 à fig9) trois cas différents de la construction demandée par l'énoncé. À chaque fois, on peut recadrer la figure avec , ou la déplacer avec le stylet (à la manière d'un calque) avec .

Dans tous les cas, on constate que les deux points  $D$  et  $H$ , symétriques l'un de l'autre par rapport au point  $O$ , sont sur l'hyperbole  $y = 1/x$ .

On constate également que le point  $D$  est toujours le quatrième point d'intersection de l'hyperbole avec le cercle circonscrit au triangle  $ABC$ .

On peut même se risquer à une conjecture supplémentaire : le point  $H$  (resp. le point  $D$ ) se trouve sur la branche de l'hyperbole qui contient un nombre pair (resp. impair) des trois points  $A, B, C$ .

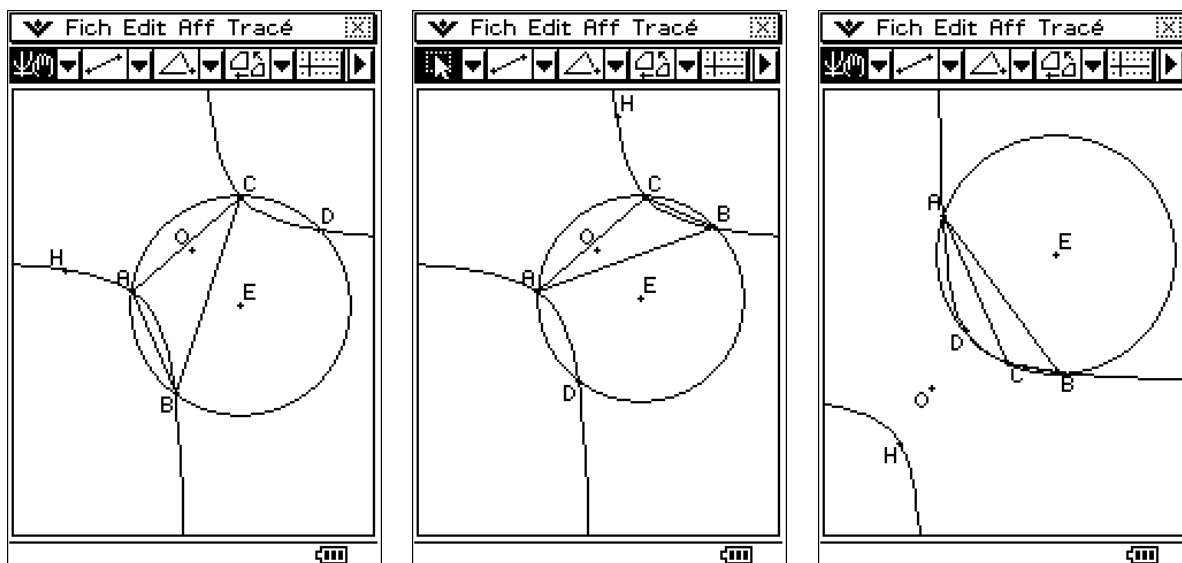


fig7



fig8


fig9

Trois versions différentes de la construction

On va maintenant examiner comment varient les coordonnées de  $H$  (donc celles de son symétrique  $D$  par rapport à  $O$ ) quand on fait varier  $A, B, C$  sur l'hyperbole.


Pour cela, on va afficher les coordonnées des points  $A, B, C$  et  $H$ .

On sélectionne le point  $A$ , puis  et on visualise le champ  (qui affiche les coordonnées du point). Un appui sur cette icône crée un champ numérique contenant ces coordonnées. On renomme ce champ en  $A$  et on le place à sa guise avec le stylet.

Remarque : le format d'affichage peut être réglé dans « /Format Géométrie ». Ici on a choisi le format **Fix 2** ou **Fix 3**.

On fait de même avec les points  $B, C$  et  $H$ . On dispose les quatre champs numériques de façon appropriée à l'écran (voir par exemple fig10).

On peut alors déplacer  $A, B, C$  et examiner comment varient les coordonnées de  $H$ .

Il est recommandé d'utiliser des coordonnées simples pour  $A, B, C$  et par exemple des abscisses entières (pour cela, afficher provisoirement la grille des points entiers avec  pour forcer les points déplacés à avoir des abscisses entières).

Si on note  $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$ ,  $B\left(b, \frac{1}{b}\right)$ ,  $C\left(c, \frac{1}{c}\right)$  et  $H(x_h, y_h)$ , on a par exemple obtenu :

– fig11 : pour  $A(-4, -1/4)$ ,  $B(-1, -1)$  et  $C(2, 1/2)$ , alors  $H(-1/8, -8)$ .

– fig12 : pour  $A(-7, -1/7)$ ,  $B(-1, -1)$  et  $C(3, 1/3)$ , alors  $H(-1/21, -21)$ .

Soyons optimistes, et risquons-nous à conjecturer la formule suivante, qui “colle” avec ces deux cas particuliers :

$$y_h = -abc, \quad \text{et} \quad x_h = \frac{1}{y_h} = -\frac{1}{abc}$$

Les coordonnées de  $H$  et  $D$  seraient donc :

$$H\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right), \quad \text{et} \quad D\left(\frac{1}{abc}, abc\right)$$

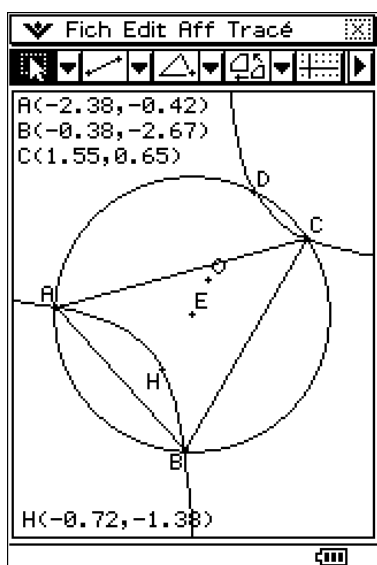


fig10

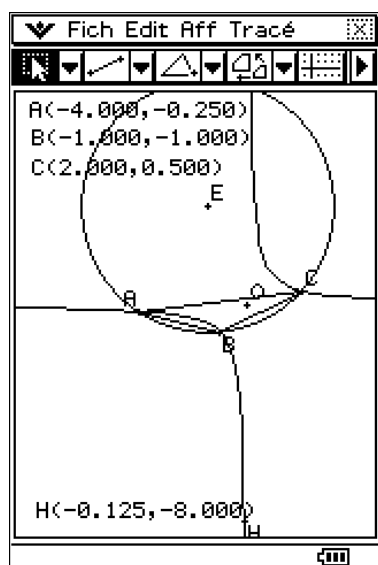


fig11

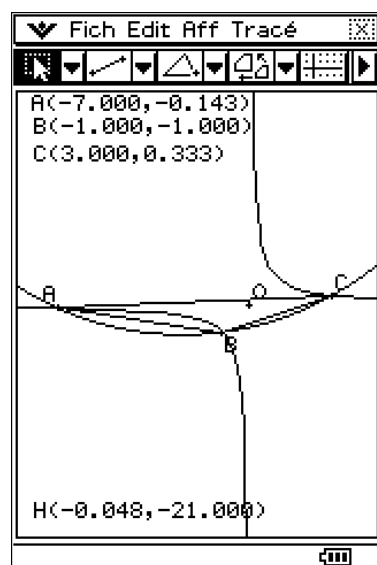



fig12

Les coordonnées de  $H$  en fonction de celles de  $A, B, C$

2. On va maintenant démontrer la conjecture concernant  $H$ .

Pour cela, on ouvre une session de calcul formel dans l'application .

On crée une fonction  $f$  permettant de construire des vecteurs  $[x, 1/x]$  représentant des points de l'hyperbole. On définit alors les points  $A, B, C$  (fig13).

On définit  $H\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$  et on vérifie (en calculant les produits scalaires appropriés) qu'il est bien l'orthocentre de  $ABC$  (fig14).

On peut faire encore plus fort en définissant un point  $H(x, y)$  quelconque, et en cherchant pour quel couple  $(x, y)$  les deux produits scalaires  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{CB}$  et  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA}$  sont nuls.

On retrouve alors que l'orthocentre est le point  $H\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$  de l'hyperbole (fig15).

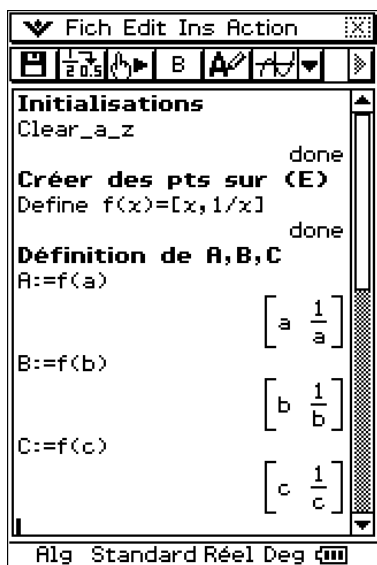


fig13 : définition des points  $A, B, C$  sur l'hyperbole

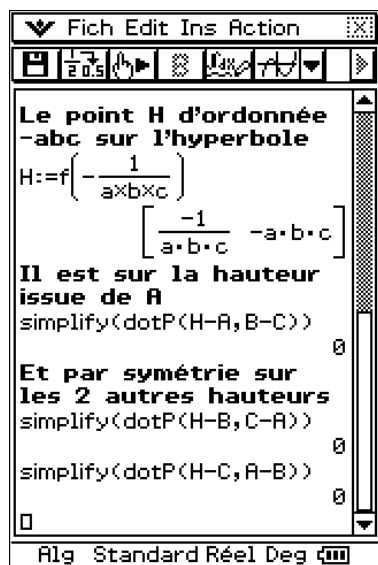


fig4 :  $H\left(-\frac{1}{abc}, -abc\right)$  est l'orthocentre de  $ABC$

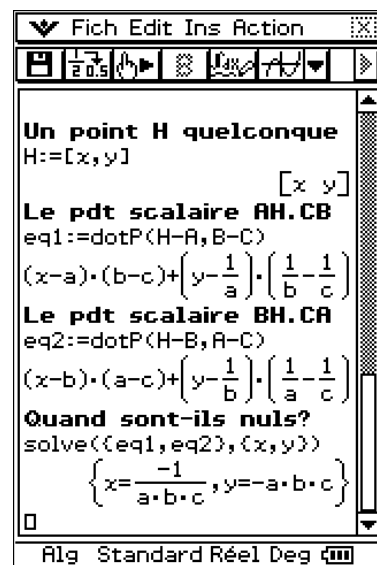


fig15 : trouver l'orthocentre en résolvant un système

3. Il reste à démontrer la conjecture concernant le point  $D$ .

On sait maintenant que  $D$  est sur l'hyperbole, et que ses coordonnées sont  $D\left(\frac{1}{abc}, abc\right)$ .

On veut donc vérifier que  $D$  est sur le cercle circonscrit à  $ABC$ .

On va commencer par déterminer les coordonnées du centre  $E$  du cercle circonscrit.

On va "faire parler la poudre" du calcul formel du Classpad!

On va d'abord obtenir  $E$  comme point d'intersection de deux des trois médiatrices.

On définit  $E(x, y)$  quelconque.

On écrit les équations de deux des médiatrices (à  $[AB]$  et  $[BC]$ ).

On résout le système formé par les deux équations. On en déduit les coordonnées du point  $E$ .

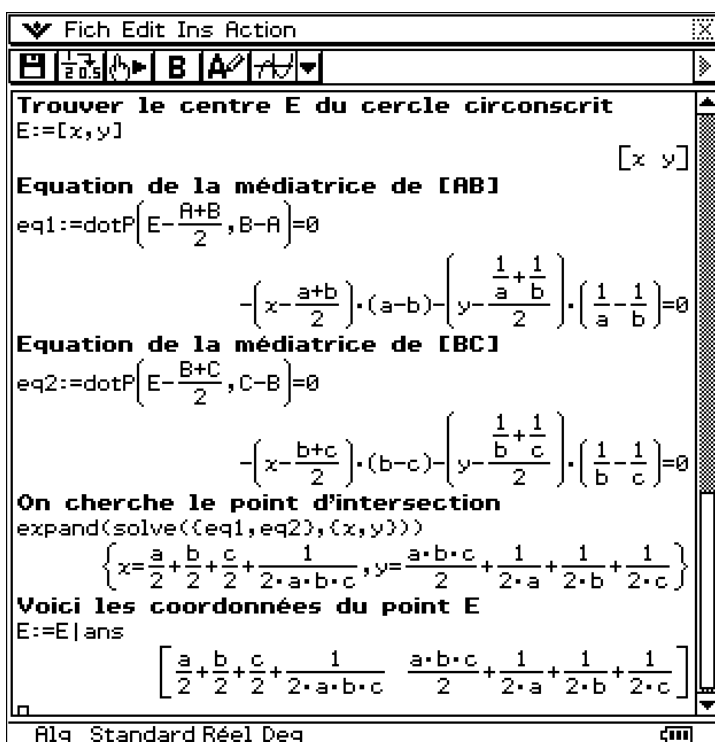


fig16 : calcul des coordonnées du point  $E$

Il y a une autre méthode pour les coordonnées de  $E$ .

On commence par définir le point  $D$ , puis le barycentre  $G$  de  $ABC$ .

Il est notoire que  $\vec{GH} = -2\vec{GE}$ .

Il en résulte  $H - G = 2(G - E)$ .

$$\text{Donc } E = \frac{3G - H}{2} = \frac{3G + D}{2}.$$

On retrouve bien le même  $E$ !

Soit  $r$  le rayon du cercle circonscrit.

Bien sûr  $EA^2 = EB^2 = EC^2 = r^2$ .

Ici on calcule  $EA^2$ .

On calcule ensuite  $ED^2$  et on trouve le même résultat.

Conclusion : le point  $D$  appartient au cercle circonscrit à  $ABC$ .

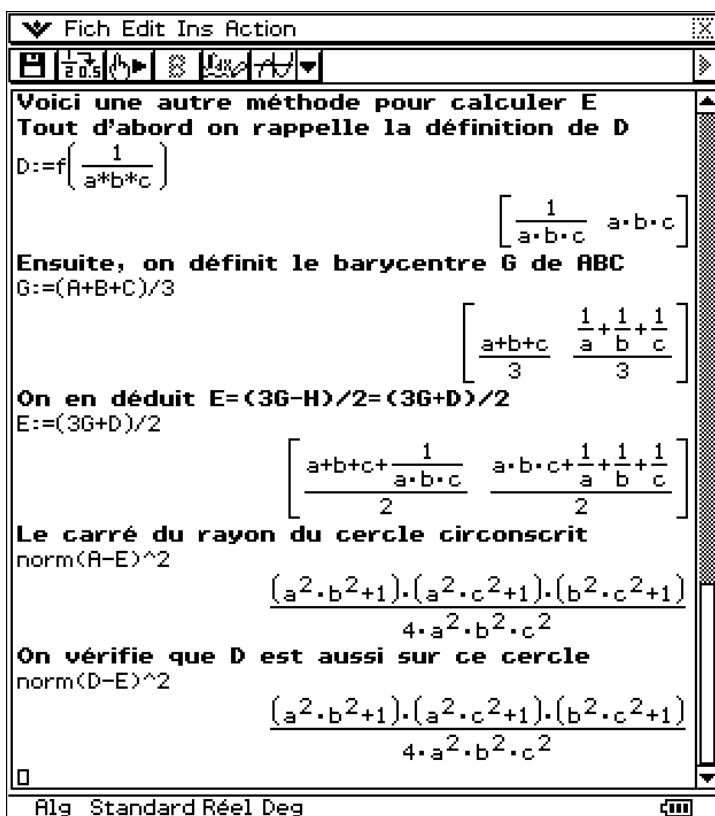


fig17 : une autre méthode de calcul de  $E$  et vérification que  $D$  est sur le cercle circonscrit