Solutions d'une relation de congruence

Énoncé

Le but du problème est de déterminer tous les entiers naturels n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$: « $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$ ».

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice déterminer tous les entiers naturels n inférieurs ou égaux à $121 = 11^2$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

   Appeler l'examinateur, lui donner le résultat trouvé et expliquer la méthode utilisée.

2. On se propose, dans cette partie 2., de démontrer que tout entier naturel n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est inférieur ou égal à 121.

   (a) Pour tout n entier naturel, calculer $a = n^2 + 11 - (n + 11)(n - 11)$.

   Appeler l'examinateur, lui donner la valeur trouvée pour a
   et lui indiquer la méthode prévue pour résoudre la question 2.(b)

   (b) Démontrer que tout n vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ est inférieur ou égal à 121.

3. Conclure en donnant l'ensemble des entiers naturels vérifiant la propriété $\mathscr{P}$.

Production demandée

– Explications orales pour les questions 1. et 2.(a) et 3. ;
– Réponse argumentée à la question 2.(b).

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. On peut utiliser plusieurs environnements différents du Classpad pour résoudre l'exercice.

   On ouvre l'application Principale.

   On commence par effacer le contenu actuel de la fenêtre par « `Edit/Tout effacer` ».

   On définit ensuite la liste `E` des entiers de 0 à $11^2 = 121$.

   L'instruction `A:=E^2+11` place alors dans `A` la liste de tous les entiers $a_n = n^2 + 11$, avec $0 \leqslant n \leqslant 121$.

   De même, `B:=E+11` place dans `B` la liste de tous les entiers $b_n = n + 11$, avec $0 \leqslant n \leqslant 121$.

   L'instruction `R:=mod(A,B)` place dans `R` la liste de tous les restes $r_n = a_n \bmod b_n$, toujours avec $0 \leqslant n \leqslant 121$.

   Enfin `listToMat(E,R)` renvoie une matrice à 2 colonnes, dont les 122 lignes sont les couples (n, r_n). On la parcourt pour y voir les entiers n tels que $r_n = 0$ (fig2).

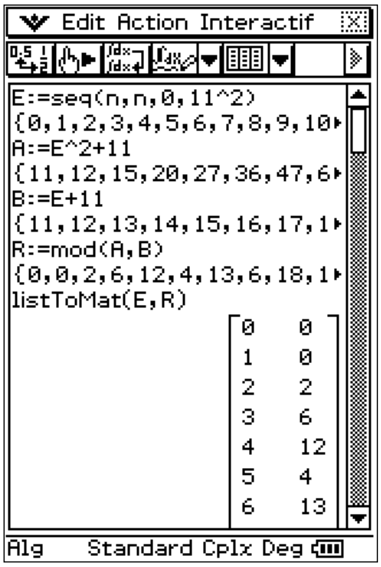

fig1 : dans l'application Principale

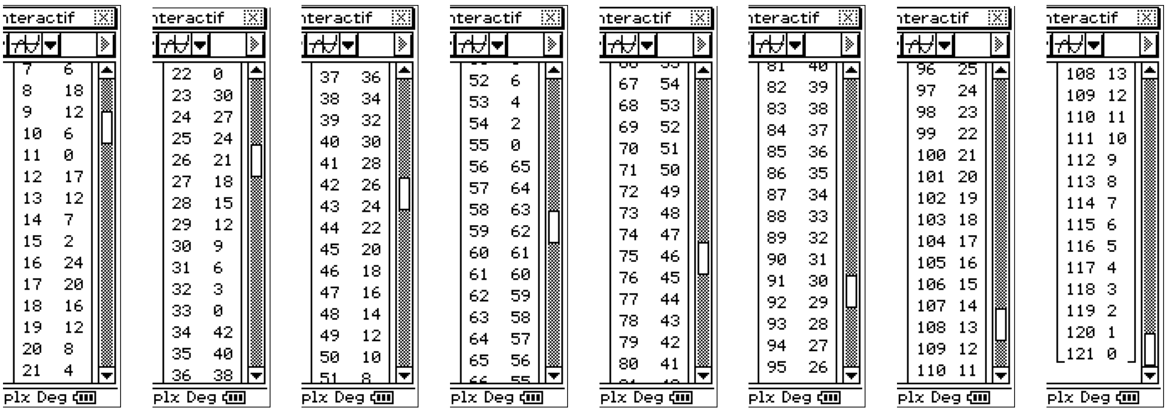

fig2 : on voit ici les couples (n, r_n), et notamment les entiers n tels que $r_n = 0$

   À la lecture des résultats ci-dessus, on constate que les entiers n de $\{0, 1, \dots, 121\}$ tels que $n + 11$ divise $n^2 + 11$ forment la liste $\{0, 1, 11, 22, 33, 55, 121\}$.

   Il y a une méthode plus confortable que celle qui consiste à relever un par un, dans la matrice précédente, les entiers n qui sont solutions du problème.

   Pour cela, on ouvre (depuis Principale) une fenêtre sur l'application "Statistiques" (icône ▦).

   Dans cette fenêtre, on fait place nette par « `Edit/Tout effacer` ».

   Dans le haut de la première colonne (à la place `list1`), on entre le nom `E`.

   De même, on remplace `list2` par `R`.

   Les deux premières colonnes affichent alors respectivement les débuts de la liste `E` des entiers n de 0 à 121 et de la liste `R` des restes r_n (fig3).

   On peut maximiser la fenêtre "statistiques" par un appui du stylet sur `Resize` (fig4).

   On va maintenant trier la colonne `R` selon les valeurs croissantes de r_n, et bien sûr conserver la synchronisation entre les valeurs de n et de r_n.

On sélectionne donc l'icône (ou la fonction « `Edit/Tri croissant` »).

Le Classpad nous demande combien de listes on veut trier (on répond 2), puis quelle est la liste de base (dans le menu déroulant des variables de liste on choisit `R`) et quelle est la seconde liste (dans le même menu, on choisit `E`).

On obtient alors le tri souhaité, basé sur les valeurs croissantes de r_n (fig5).

L'examen des premières lignes du tableau trié montre à nouveau que les entiers n de $\{0, 1, \ldots, 121\}$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ sont $0, 1, 11, 22, 33, 55$ et 121.

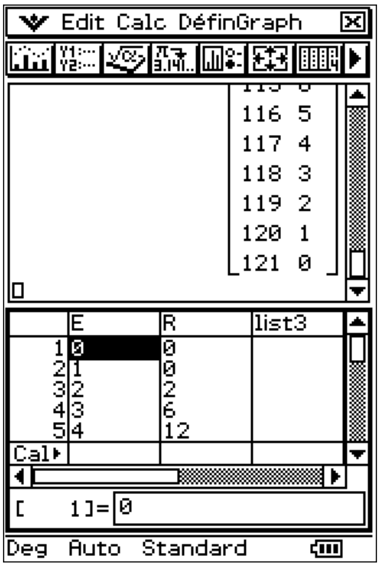

fig3 : `E` et `R` dans 

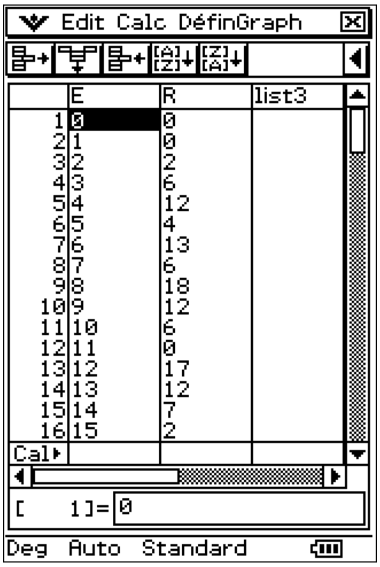

fig4 : après un `Resize`

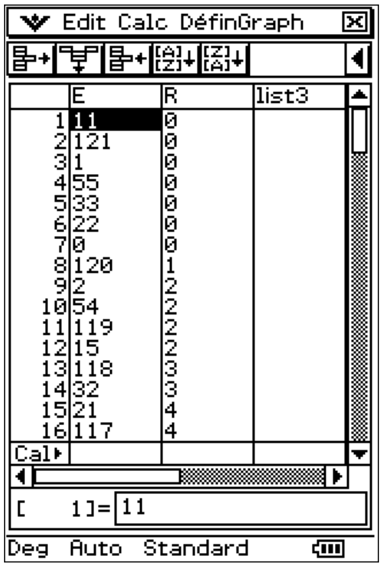

fig5 : après un tri croissant

Nous allons maintenant retrouver ces résultats dans l'application "Tableur".

On entre dans cette application par un appui du stylet sur l'icône  dans l'écran d'accueil du Classpad.

On crée une nouvelle feuille de calcul par « `Fich/Nouveau` ».

On choisit « `Edit/Remplir suite` » puis on renseigne la fenêtre comme indiqué (fig6).

Après validation, les entiers de 0 à 121 apparaissent dans la colonne `A`.

On place ensuite le curseur sur la cellule `B1`. On choisit « `Edit/Remplir échelle` » et on renseigne la fenêtre comme indiqué (fig7).

Ainsi on copie la formule `=mod(A1^2+11,A1+11)` de `B1` jusqu'à `B122`.

Comme il s'agit d'*adressage relatif*, cela signifie qu'on place `=mod(A[k]^2+11,A[k]+11)` dans la cellule `B[k]`, pour $1 \leqslant k \leqslant 122$. On voit le résultat (fig8).

On choisit la fonction « `Edit/Trier` » et on renseigne la fenêtre comme indiqué (fig9).

On obtient alors un tableau trié suivant les valeurs croissantes de la colonne B (c'est-à-dire suivant les restes r_n croissants).

Le résultat est très proche de celui obtenu dans l'application , à ceci près (et c'est mieux ici) que les valeurs de l'entier n qui correspondent à un même reste r_n (et en particulier les premières, qui correspondent à un reste r_n nul !) apparaissent triées elles aussi dans l'ordre croissant.

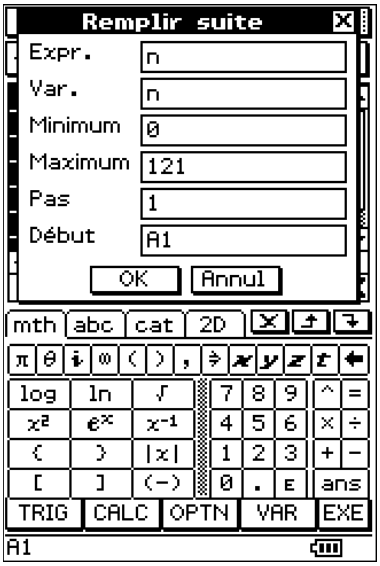

fig6 : définition de la suite $\{0, 1, \ldots, 121\}$

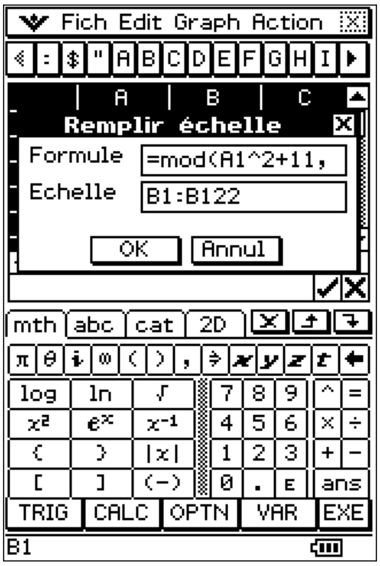

fig7 : le calcul des restes $(n^2 + 11)$ mod $(n + 11)$

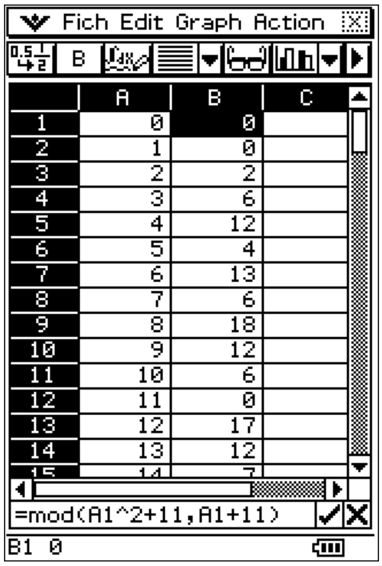

fig8 : affichage des deux colonnes n et r_n

On retrouve donc (pour la troisième fois !) que les entiers n de $\{0, 1, \ldots, 121\}$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}$ sont $0, 1, 11, 22, 33, 55$ et 121.

fig9 : définition de la zone et de la clef de tri

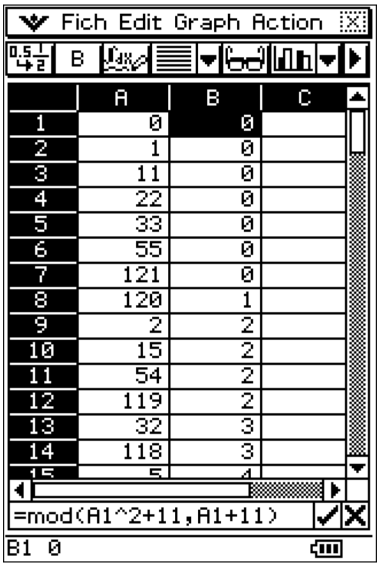

fig10 : tableau trié suivant les restes r_n croissants

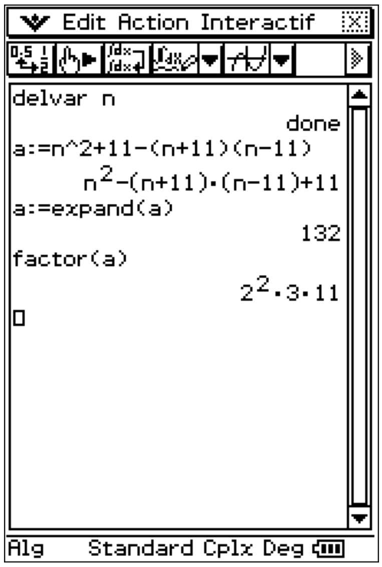

fig11 : un tout petit peu de calcul formel

2. Bien sûr, $a = 132$. Soit n dans $\mathbb{N}$, vérifiant $\mathscr{P}$: $\exists\, q_n \in \mathbb{N},\ n^2 + 11 = (n + 11)q_n$.

   On en déduit $a = (n + 11)q_n - (n + 11)(n - 11)$ donc $132 = (n + 11)(q_n - n + 11)$.

   Ainsi $n + 11$ divise 132. Il en découle $11 \leqslant n + 11 \leqslant 132$ donc $0 \leqslant n \leqslant 121$.

   Réciproquement, on sait que les n de $\{0, 1, \ldots, 121\}$ vérifiant $\mathscr{P}$ sont $0, 1, 11, 22, 33, 55, 121$.

   On a donc trouvé l'ensemble *exact* des entiers naturels n qui vérifient $\mathscr{P}$.

   Remarque : on pouvait noter que les diviseurs de $a = 132 = 2^2 \times 3 \times 11$ sont les $2^b 3^c 11^d$ avec $b \in \{0, 1, 2\}$, $c \in \{0, 1\}$ et $d \in \{0, 1\}$, c'est-à-dire $1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 44, 66, 132$.

   On a donc $n + 11 \in \{11, 12, 22, 44, 66, 132\}$ et on retrouve $n \in \{0, 1, 11, 22, 33, 55, 121\}$.