Tangentes à deux courbes

Énoncé

Soit $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ les courbes d'équations respectives $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ dans un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orthonormal du plan.

Soit a un nombre réel quelconque. On désigne respectivement par M et N les points de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ d'abscisse a et par (T_1) et (T_2) les tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en M et N.

Les droites (T_1) et (T_2) coupent respectivement l'axe des abscisses en P et Q.

1. Avec un logiciel de géométrie dynamique (ou une calculatrice graphique) construire les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ et les droites (T_1) et (T_2). Que peut-on remarquer pour les droites (T_1) et (T_2) ?

   > Appeler le professeur pour lui montrer le graphique créé
   > et lui indiquer la conjecture faite au sujet de (T_1) et de (T_2).

2. À l'aide du logiciel émettre une conjecture à propos de la longueur du segment $[PQ]$.

   > Appeler le professeur pour lui présenter la conjecture et la démonstration envisagée.

3. Démontrer la conjecture émise à la question 2.

Production demandée

- Exposé oral de la méthode de construction de la figure adaptée à la situation ;
- Exposé oral des conjectures ;
- Exposé de la méthode choisie pour démontrer la dernière conjecture.

Proposition de corrigé avec le Classpad

1. Pour cet exercice, on va créer une “eActivité”. Les eActivités sont une spécialité assez extraordinaire du Classpad. Elles permettent de créer de véritables séquences pédagogiques en reliant, au sein d'un même document, les différents environnements du Classpad (calcul formel, géométrie, tableur, etc...).

   Une eActivité est une succession de lignes (de textes ou de calculs) et de “bandeaux”, ceux-ci permettant précisément d'invoquer une autre application depuis l'eActivité. La totalité document peut alors être sauvegardée dans un fichier unique.

   Ici nous allons créer une eActivité très simple, consistant en une figure de géométrie, reliée *dynamiquement* (nous allons voir comment) à des expressions symboliques.

   Depuis l'écran d'accueil, nous ouvrons l'application “eActivity” par un appui sur eActivity.

   Nous insérons un *bandeau de géométrie* en utilisant le menu « `Ins/Bandeau/Géométrie` » (fig1), ou plus simplement en pointant l'icône avec le stylet (fig2).

   Le bandeau apparaît alors, de même qu'une fenêtre de géométrie (ouverte sur le demi-écran inférieur). Dans cette fenêtre, nous faisons appraître les axes de coordonnées ainsi que la grille des points à coefficients entiers (utiliser l'icône).

   Avec le stylet, on peut sélectionner indifféremment la fenêtre de l'eActivité ou la fenêtre de géométrie. On peut ainsi revenir sur la fenêtre eActivité pour donner un nom (par exemple “*la figure du sujet 006*”) au bandeau de géométrie (fig3).

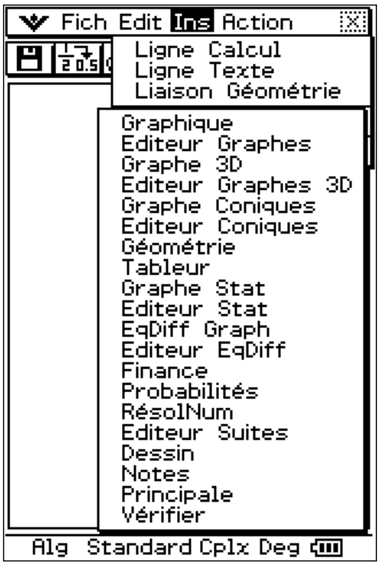

fig1 : insérer un bandeau de géométrie (méthode 1)

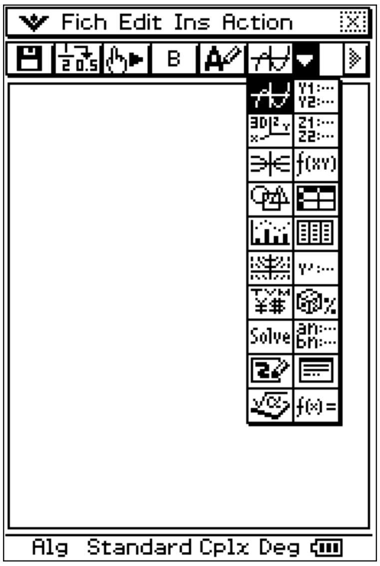

fig2 : insérer un bandeau de géométrie (méthode 2)

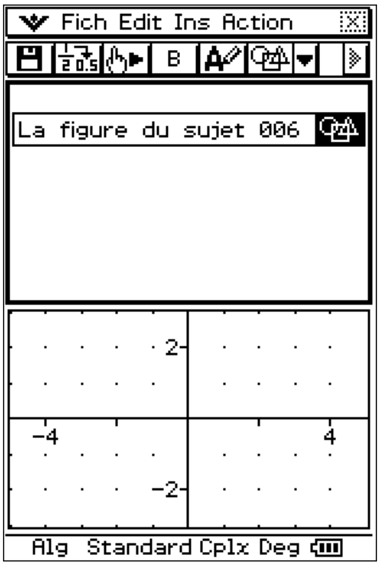

fig3 : double écran eActivité/géométrie

   Dans la fenêtre de géométrie, on trace l'axe des abscisses (contrairement aux apparences, la droite $y = 0$ n'est pas encore *physiquement* présente à l'écran). Pour cela, on utilise l'icône et on précise deux points de cette droite (les points de la grille sont dotés d'un certain magnétisme : cela facilite le choix de deux points d'ordonnée nulle).

   Pour alléger la figure, on cache les deux points ayant servi à tracer l'axe $x'Ox$ (les sélectionner puis utiliser « `Edit/Propriétés/Caché` ») et on annule l'affichage des axes et de la grille (icône).

On trace ensuite (avec « `Tracé/Fonction/f(x)` ») les courbes $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$ dans l'écran de géométrie (fig4).

On revient maintenant à la fenêtre de l'eActivité. Juste sous le bandeau de géométrie, on insère successivement deux liens dynamiques eActivité↔géométrie (faire « `Ins/Liaison géométrie` » deux fois de suite).

Chacun de ces liens débute par l'icône §. On écrit `tanLine(e^(x),x,0.5)` sur le premier lien et `tanLine(e^(-x),x,0.5)` sur le deuxième.

On sélectionne le contenu du premier lien et on glisse cette sélection vers l'écran de géométrie : la tangente en $x = 0.5$ à la courbe $y = \mathrm{e}^x$ est immédiatement tracée !

Avec le deuxième lien, on trace également la tangente en $x = 0.5$ à $y = \mathrm{e}^{-x}$ (fig5).

On peut redimensionner la figure pour qu'elle occupe tout l'écran (icône `Resize` située juste sous l'écran), et utiliser un "zoom boîte" (icône , ou « `Aff/Cadre de Zoom` ») pour afficher au mieux le triangle formé par le point commun aux deux tangentes et leurs points d'intersections respectifs avec l'axe $x'Ox$ (fig6).

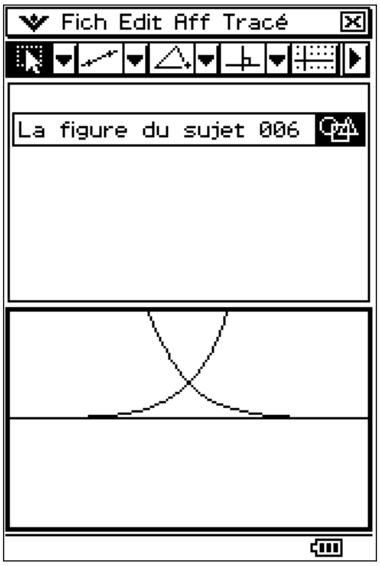

fig4 : tracé des courbes $y = \mathrm{e}^x$ et $y = \mathrm{e}^{-x}$

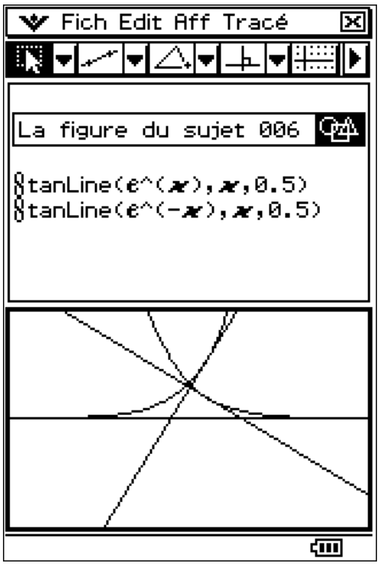

fig5 : tracé des tangentes par glisser-déposer des liens

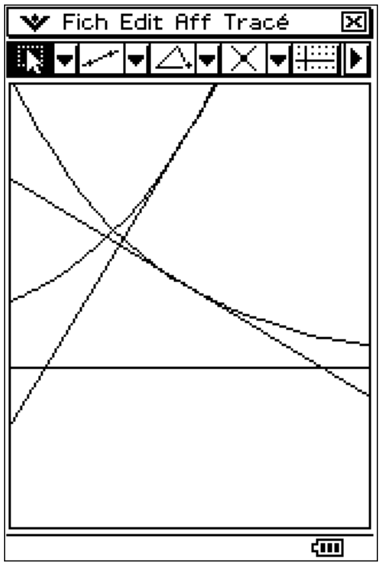

fig6 : après avoir maximisé et zoomé sur la figure

On peut maintenant créer les points d'intersection P et Q des deux tangentes avec l'axe $x'Ox$ (sélectionner deux droites puis l'icône). Rappel : pour changer le nom que le Classpad donne automatiquement à un point, sélectionner ce point puis accéder à la deuxième barre d'icône avec , et utiliser le champ .

On sélectionne les deux tangentes, puis l'outil « `Tracé/Angle(marqué)` ». Une mesure de l'angle de ces droites est alors affichée, et on constate que ces tangentes sont orthogonales.

2. On sélectionne ensuite les points P et Q, puis (après un appui éventuel sur) on accède à l'icône . On constate que la longueur du segment $[PQ]$ est égale à 2.

   Si on touche l'icône avec le stylet, on crée un champ numérique contenant cette longueur. On peut renommer ce champ (l'appeler par exemple `PQ=`) et le déplacer à sa guise sur l'écran de géométrie (fig7)

   NB : on a grossi le trait des deux courbes représentatives pour mieux les faire ressortir (sélectionner une courbe puis utiliser « `Edit/Propriétés/Plus épais` »).

Nous allons maintenant utiliser ce qui fait l'originalité des liens géométriques dans une eActivité. Ces liens assurent en effet une relation dynamique entre l'objet affiché sur la figure et l'expression symbolique qui lui correspond.

Autrement dit, toute modification de l'expression symbolique se répercute sur l'objet affiché, et inversement (même si cela ne nous intéresse pas ici) toute modification de l'objet géométrique est répercutée sur l'expression symbolique correspondante.

Pour bien comprendre comment cela fonctionne, on revient en mode "deux écrans" (utiliser à nouveau "Resize" sur la fenêtre de géométrie).

Dans les deux liens géométriques, on remplace la valeur 0.5 par la valeur 0.7 : les deux tangentes sont redessinées, les points P et Q sont modifiés en conséquence, l'angle affiché indique toujours 90° et la distance PQ est toujours égale à 2 (fig8).

On peut modifier à sa guise l'abscisse du point où sont calculées les tangentes et vérifier que ces deux droites sont toujours orthogonales et que le segment $[PQ]$ qu'elles délimitent sur l'axe des abscisses est toujours de longueur 2. Bien sûr, il faut effectuer quelques zooms-arrière avant de se recentrer sur la partie utile de la figure (fig9).

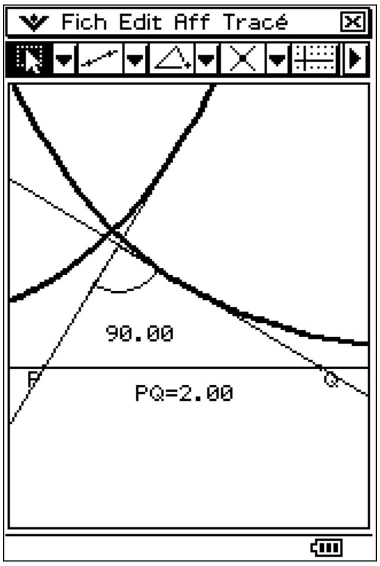

fig7 : pour $a = 0.5$

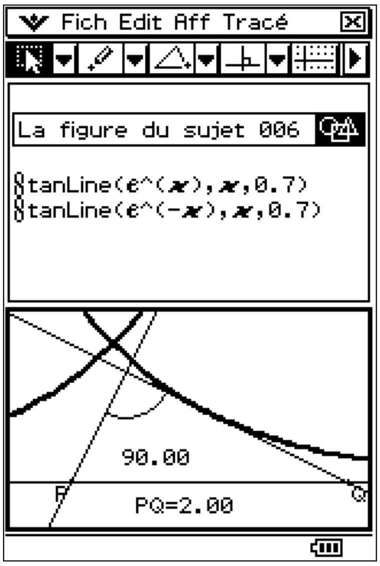

fig8 : pour $a = 0.7$

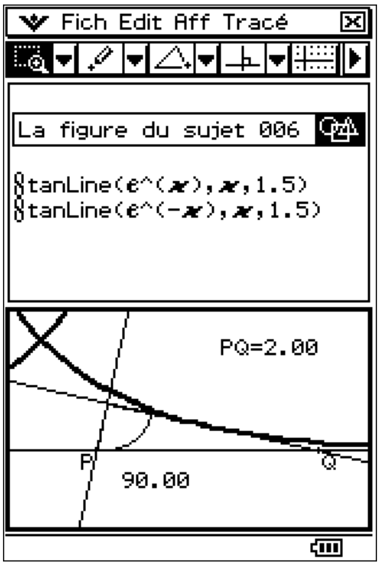

fig9 : pour $a = 1.5$

Cet exemple illustre paraitement le confort qu'apporte le stylet dans la manipulation du Classpad, et la qualité du dialogue qu'on peut instaurer entre deux applications distinctes (le calcul symbolique et la géométrie) en utilisant les liens dynamiques.

3. Nous laissons au Classpad le soin de prouver que $PQ = 2$.

   On forme l'équation des deux tangentes au point d'abscisse a.

   On cherche ensuite l'abscisse des points d'intersection de ces deux droites avec l'axe des $x'Ox$.

   On voit que P et Q ont pour coordonnées $(a–1, 0)$ et $(a+1, 0)$, et il en découle $\overrightarrow{PQ} = (2, 0)$ donc $PQ = 2$.