Expression du terme de rang n d'une suite récurrente

Énoncé

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme u_0 et telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenu a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la particularité trouvée

2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connait la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n, la valeur de u_n sans connaître celle de u_{n-1}. Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.

   (a) À l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n.

   Appeler l'examinateur pour une vérification de la formule trouvée

   (b) Démontrer cette formule.

Production demandée

- Le nuage de points attendu dans la question 1 et la particularité trouvée à ce nuage.
- La stratégie de démonstration retenue à la question 2 ainsi que les étapes de cette démonstration.

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

Pour des raisons propres au Classpad 300, on renomme (a_n) la suite étudiée.

Depuis l'écran des menus, on lance l'environnement “Suites” et on crée la suite (a_n) comme indiqué dans l'énoncé (fig1).

On définit les paramètres pour générer la table des valeurs (fig2).

On lance le calcul de cette table des couples (n, a_n) pour $0 \leq n \leq 19$ (fig3).

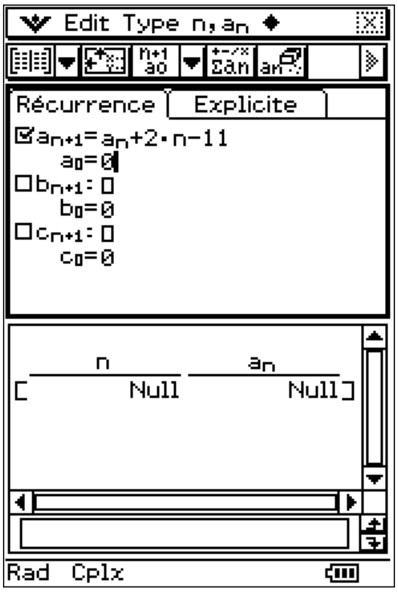

fig1 : définition des (a_n)

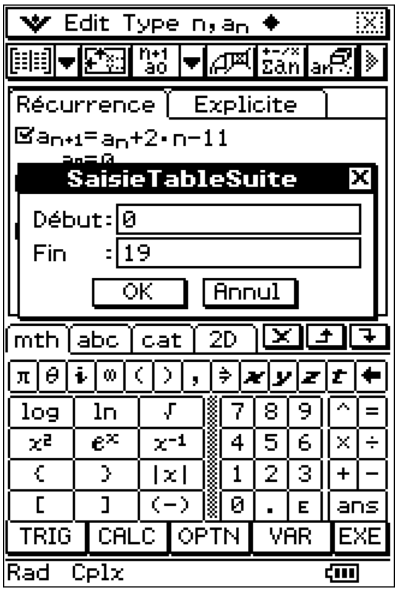

fig2 : paramètres de table

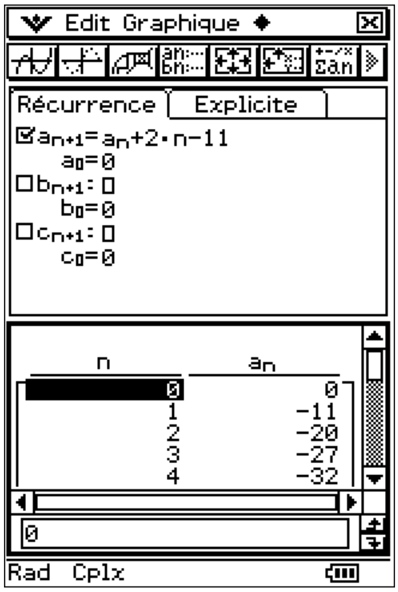

fig3 : création de la table

Les valeurs obtenues pour a_n se situent entre -36 et 133. On définit une fenêtre de tracé en conséquence (fig4). On lance alors le tracé de la table de valeurs (en choisissant ou non de connecter ces points, ici on ne l'a pas fait). Il semble bien que les points (n, a_n) soient situés sur une même parabole (fig5).

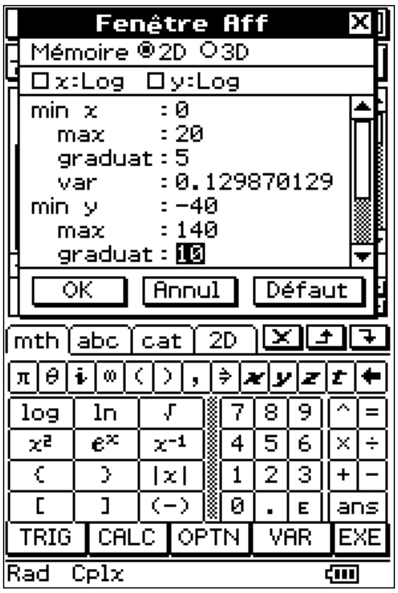

fig4 : fenêtre de tracé

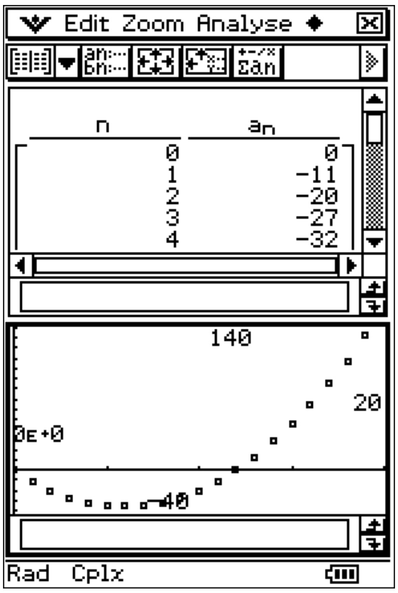

fig5 : le nuage de points

Pour confirmer cette intuition, on va faire une étude statistique du nuage de points (et plus précisément une régression quadratique).

Au moyen de l'outil "♦ `Table vers liste`", on place la première colonne de la table dans la variable de liste `list1` et la deuxième colonne dans la variable de liste `list2` (fig6 à fig9).

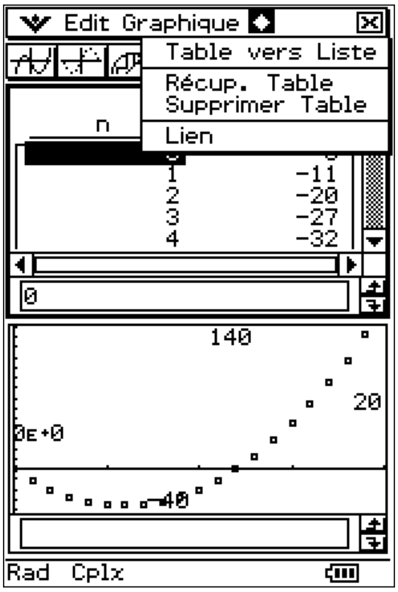

fig6 : choix de l'outil

fig7 : exportation colonne 1

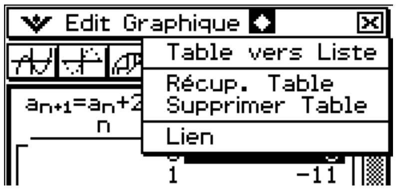

fig8 : choix de l'outil

fig9 : exportation colonne 2

On passe dans l'application "Statistiques", où apparaissent `list1` et `list2` (fig10).

Dans le menu `Calc`, on choisit une régression quadratique (fig11).

On choisit bien sûr (mais ce sont les choix par défaut) `list1` comme liste d'abscisses et `list2` comme liste d'ordonnées (fig12).

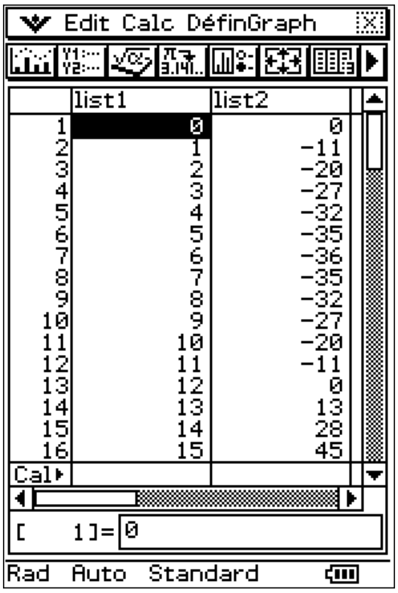

fig10 : éditeur de stats

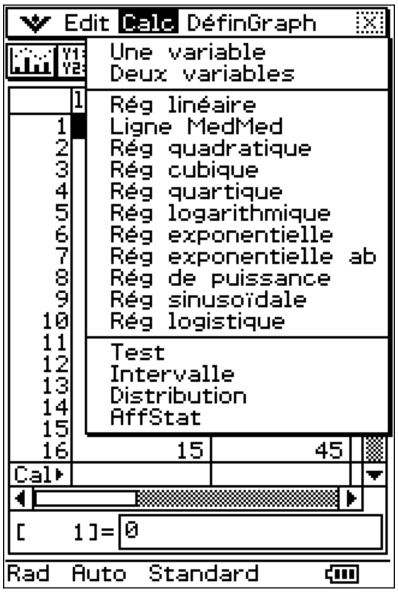

fig11 : choix du modèle

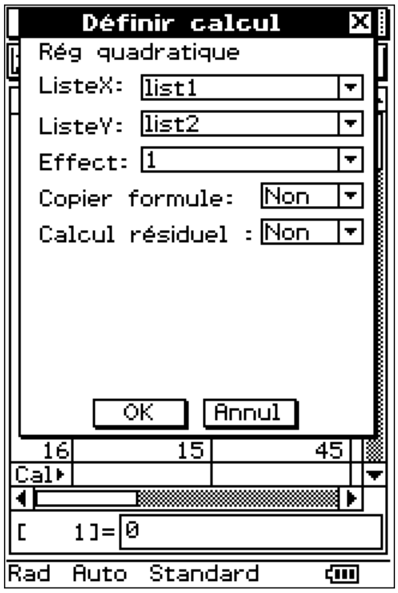

fig12 : choix des listes

Le calcul fait apparaître un ajustement parfait du nuage de points par la parabole d'équation $y = x^2 - 12x$ (fig 13). Le résultat est suivi d'un affichage du nuage et de la parabole (fig 14).

Il semble donc qu'on ait l'égalité $a_n = n^2 - 12n$ pour tout n.

Il est possible de demander au Classpad de vérifier cette formule par le calcul formel. Pour cela on repasse dans l'environnement "Suites" et on choisit l'écran d'exécution des calculs. On voit comment l'instruction `rsolve` donne le résultat exact quand on indique la formule de récurrence $a_{n+1} = a_n + 2n - 11$ et la condition initiale $a_0 = 1$ (fig 15).

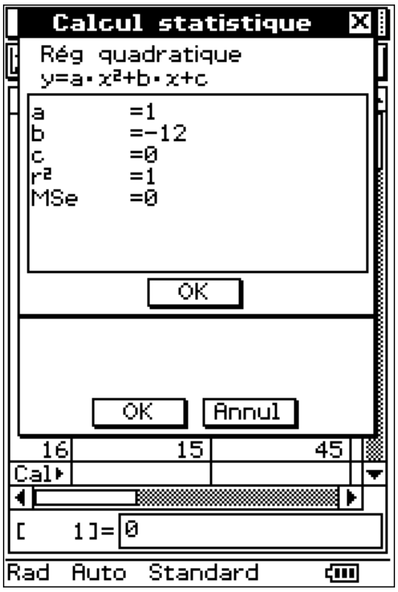

fig13 : ajustement parfait

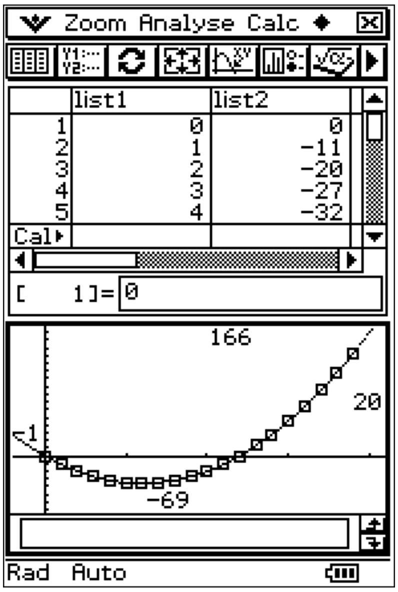

fig14 : points et parabole

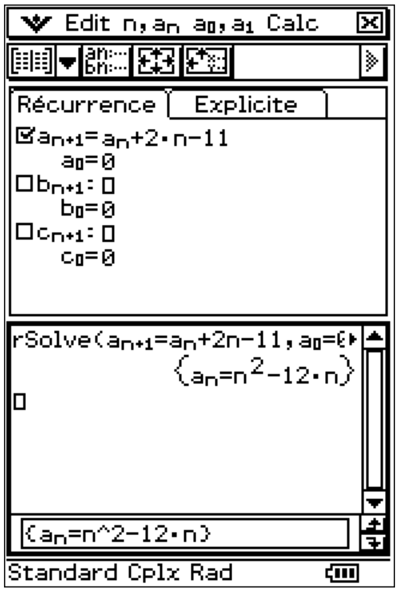

fig15 : résultat confirmé.

Pour terminer, la démonstration effective de la formule $a_n = n^2 - 12n$ peut se faire de plusieurs manières différentes...

- Par récurrence. L'égalité est vraie si $n = 0$, et si $a_n = n^2 - 12n$ alors :
  $$a_{n+1} = a_n + 2n - 11 = n^2 - 12n + 2n - 11 = n^2 + 2n + 1 - 12n - 12 = (n+1)^2 - 12(n+1).$$
- En sommant les égalités $a_{k+1} - a_k = 2k - 11$ pour $0 \leq k \leq n - 1$.
  $$a_n = a_n - a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2k - 11) = n(n-1) - 11n = n^2 - 12n.$$
- Par une méthode de coefficients indéterminés, en posant $a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma$.
  Nécessairement $\gamma = 0$ car $a_0 = 0$.
  En reportant dans $a_{n+1} = a_n + 2n - 11$ on trouve $\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) = \alpha n^2 + (\beta + 2)n - 11$
  donc $2\alpha n + \alpha + \beta = 2n - 11$ pour tout n.
  L'identification donne alors $\alpha = 1$ et $\alpha + \beta = -11$ donc $\beta = -12$, c'est-à-dire $a_n = n^2 - 12n$.