

Thème : Outils  
Les nombres complexes

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 2 Juillet 2006.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse <http://capes-math.org/>

### 1. L'exercice proposé au candidat

On se donne un rectangle  $ABCD$  direct. On pose  $\begin{cases} AB = CD = a \\ AD = BC = b \end{cases}$  ( $a > 0, b > 0$ )

On se pose le problème suivant (cf fig.1) : existe-t-il un triangle équilatéral  $APQ$  inscrit dans le rectangle  $ABCD$  (le point  $P$  appartenant au segment  $[BC]$  et le point  $Q$  au segment  $[CD]$ ) ?

1. Soit  $P$  un point quelconque de  $[BC]$  et  $Q$  un point quelconque du segment  $[CD]$ .

On pose  $DQ = x$  et  $BP = y$ .

Montrer que  $APQ$  est équilatéral si et seulement si  $\begin{cases} x = 2a - b\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases}$

*Indication : utiliser les affixes, et une rotation de centre  $A$ .*

2. En déduire que le problème a une solution  $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$  et qu'alors elle est unique.

3. On suppose que le problème posé admet une solution.

On construit les triangles équilatéraux  $BCI$  et  $CDJ$ , comme indiqué figure 2.

Soit  $P$  le point d'intersection des droites  $(AJ)$  et  $(BC)$ , et  $Q$  le point d'intersection des droites  $(AI)$  et  $(CD)$ . Montrer que  $APQ$  est le triangle équilatéral cherché.

En déduire une construction du triangle  $APQ$  à la règle et au compas.

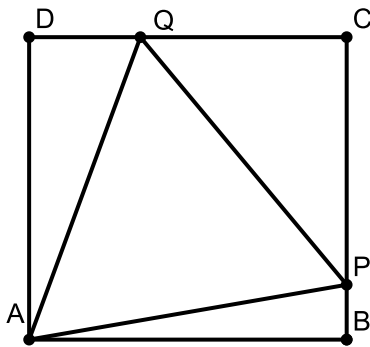


fig.1

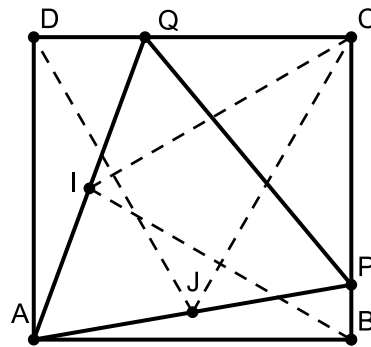


fig.2

## 2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

*Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes:*

- Q.1) Dégagez les méthodes et outils nécessaires à la résolution de cet exercice.
- Q.2) En utilisant l'environnement de géométrie dynamique de la calculatrice, construire le rectangle ABCD et le triangle équilatéral APQ (quand il existe). Animer la figure de façon à voir les conditions limites entre lesquelles le problème posé admet une solution.

*Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :*

- Sa réponse à la question Q.1).
- Un ou deux énoncés d'exercices se rapportant au thème « Géométrie : nombres complexes ».

## Proposition de corrigé avec le Classpad 300

### I. L'exercice proposé au candidat

1. On peut se placer dans le repère  $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , avec  $\vec{e}_1 = \frac{\vec{AB}}{AB}$  et  $\vec{e}_2 = \frac{\vec{AD}}{AD}$ .

Dans ce repère  $P$  et  $Q$  ont pour affixes  $p = a + iy$  et  $q = x + ib$ .

Avec ces notations :

$$APQ \text{ est équilatéral} \Leftrightarrow q = e^{i\pi/3}p \Leftrightarrow x + ib = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})(a + iy)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a - y\sqrt{3} \\ 2b = a\sqrt{3} + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a - (2b - a\sqrt{3})\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - b\sqrt{3} \\ y = 2b - a\sqrt{3} \end{cases}$$

2. Il y a une solution si et seulement si le couple  $(x, y)$  précédent est dans  $[0, a] \times [0, b]$ .

Cela équivaut à  $\begin{cases} 0 \leq 2a - b\sqrt{3} \leq a \\ 0 \leq 2b - a\sqrt{3} \leq b \end{cases}$  c'est-à-dire à  $\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Cela équivaut bien à  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ .

Si ces conditions sont réalisées, il y a effectivement une solution unique (tout simplement parce que les valeurs  $x$  et  $y$  définissant  $P$  et  $Q$  sont obtenues de façon unique).

3. Les points  $P$  et  $Q$  ont pour affixes respectifs  $\begin{cases} p = a + iy = a + i(2b - a\sqrt{3}) \\ q = x + ib = 2a - b\sqrt{3} + ib \end{cases}$

$J$  est l'image de  $D$  dans la rotation de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .



L'affixe de  $J$  est donc :  $a + ib - \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})a = \frac{p}{2}$ . Ainsi  $J$  est le milieu de  $[AP]$ .

On vérifie de même que  $I$  est le milieu de  $[AQ]$ .

Ainsi  $P$  (resp.  $Q$ ) est l'intersection de  $(BC)$  (resp.  $(CD)$ ) avec  $(AJ)$  (resp.  $(AI)$ ).

La construction de  $P$  et  $Q$  résulte alors immédiatement de celle de  $I$  et  $J$  (ce dernier par exemple étant à l'intersection de deux arcs de cercle de centres  $C$  et  $D$  et de rayon  $a$ ).

### II. Avec le Classpad

Dans l'application , on choisit « Fich/Nouveau ». On choisit l'icône  (ou « Tracé/Forme spéciale/rectangle ») puis on délimite une zone rectangulaire avec le stylet (le poser en une des sommets puis déplacer le stylet à la surface de l'écran avant de le relâcher).

Les sommets du rectangle obtenu sont automatiquement nommés  $A, B, C, D$  mais dans le sens horaire (plutôt que dans le sens trigonométrique, comme dans l'énoncé). Pour se conformer à l'énoncé, on peut échanger les noms des points  $B$  et  $D$  (fig1).

Le problème (existence du triangle équilatéral  $APQ$  inscrit dans le rectangle  $ABCD$ ) possède une solution si et seulement si il existe, sur le segment  $[CD]$ , un point  $Q$  qui soit l'image d'un point  $P$  de  $[BC]$  dans la rotation  $r$  de centre  $A$  et d'angle  $60^\circ$ .

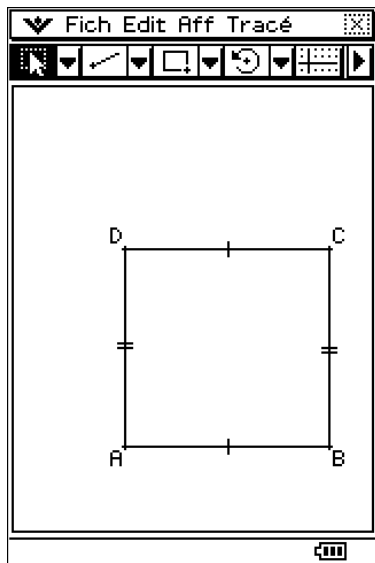


fig1 : le rectangle  $ABCD$

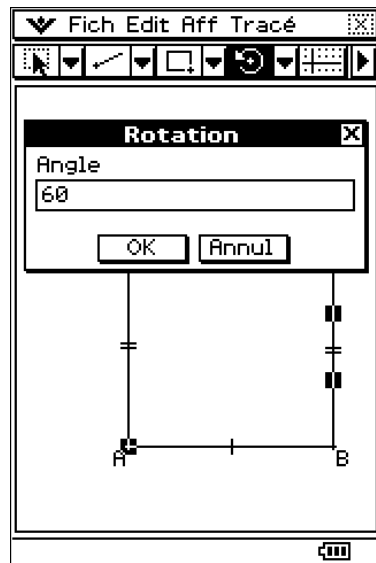


fig2 : définir la rotation  $r$

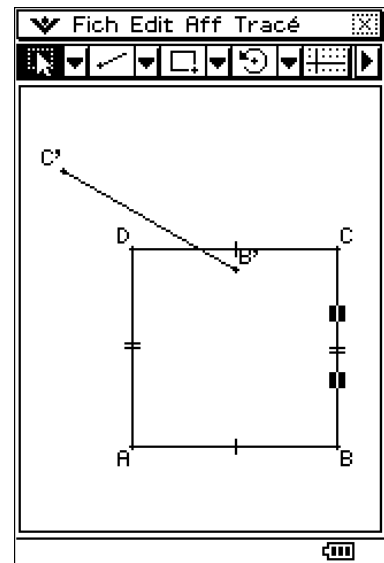



fig3 :  $[B'C'] = r([BC])$

Pour tester l'existence d'une solution, on va donc construire le segment  $[B'C'] = r([BC])$ .

Pour cela, on sélectionne  $[BC]$  puis l'outil  (ou la fonction « Tracé/Construire/Rotation »).

Le Classpad nous demande alors de pointer le centre de la rotation avec le stylet. Naturellement on désigne le point  $A$ . Une fenêtre s'ouvre alors demandant l'angle de cette rotation (fig2). On entre la valeur 60 puis on valide. Le segment  $[B'C']$  est tracé (fig3).

Avec le rectangle  $ABCD$  tel qu'il a été choisi fig1, on voit que  $[B'C']$  rencontre  $[CD]$ .

On nomme  $Q$  le point d'intersection (sélectionner  $[CD]$  et  $[B'C']$  puis l'outil .

On applique ensuite à  $Q'$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $-60^\circ$ . On note  $P$  le point obtenu, qui appartient évidemment au segment  $[BC]$ .

On trace le triangle  $APQ$  (outil  ou ): il est équilatéral (fig4).

On peut alors modifier  $ABCD$  (en sélectionnant par exemple le coté  $[AB]$  et en le tirant horizontalement avec le stylet. Tant qu'on est dans les limites de l'existence d'une solution, on voit la nouvelle position du triangle  $APQ$  inscrit dans le rectangle  $ABCD$  (fig5 et fig6).

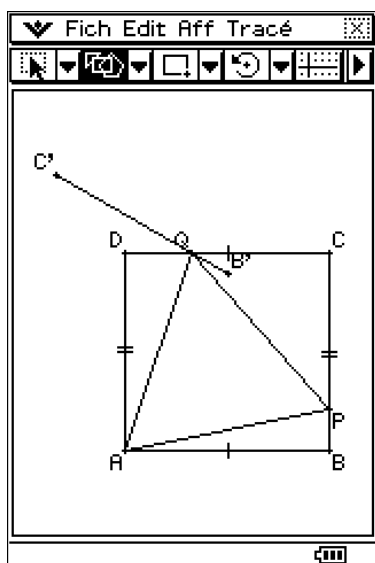


fig4

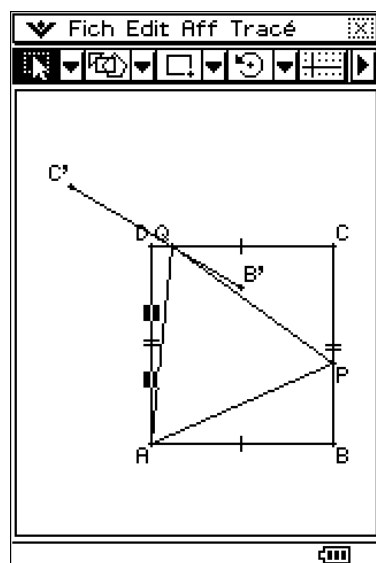


fig5

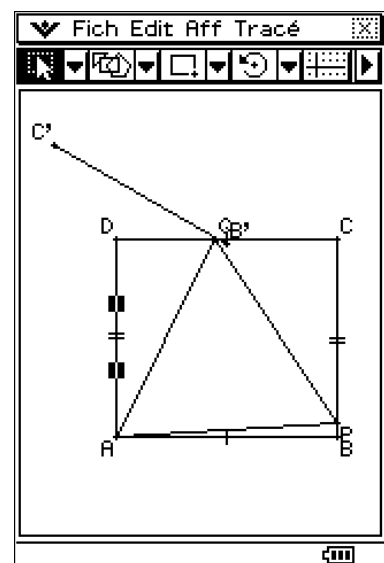




fig6



Trois exemples où un triangle équilatéral  $APQ$  est inscrit dans  $ABCD$

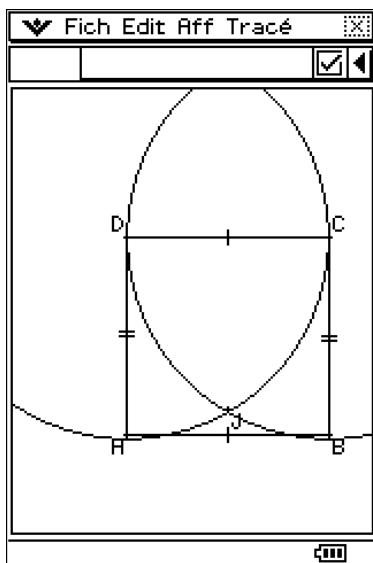
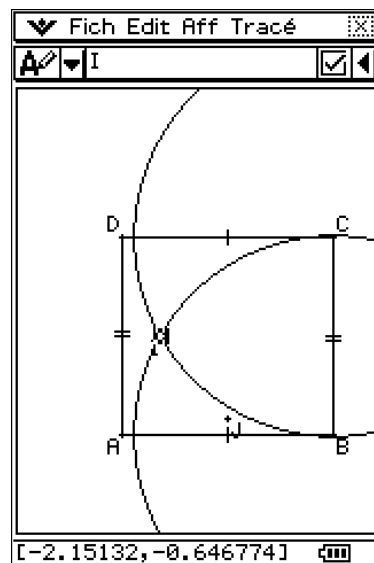
Pour construire le triangle  $APQ$  à la règle et au compas, on revient au rectangle  $ABCD$  de la figure 1 (on efface les constructions réalisées après la définition de ce rectangle).


On mène le cercle de centre  $C$  et passant par  $D$ , puis le cercle de centre  $D$  et passant par  $C$  (utiliser l'icône , pointer le centre puis un point de la circonférence).

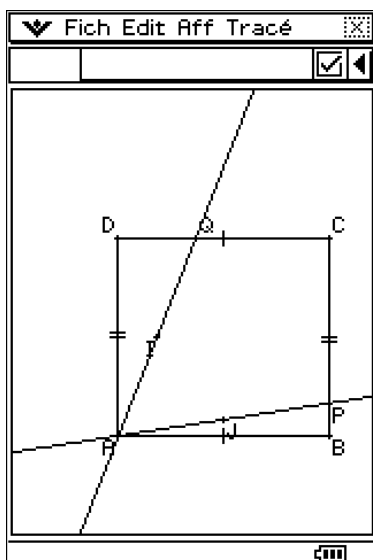
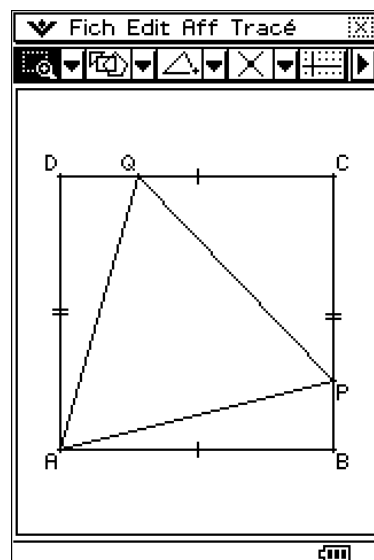
A l'intersection de ces deux cercles, on crée (icône ) un point qu'on renomme  $J$  (fig7).

Pour alléger la figure, on cache ces deux cercles (les sélectionner puis « Edit/Propriétés/Caché »).

On construit ensuite le cercle de centre  $B$  passant par  $C$ , et le cercle de centre  $C$  passant par  $B$ . On marque le point  $I$  à leur intersection (fig8). On cache ces deux cercles puis on trace (icône ) les droites  $(AI)$  et  $(AJ)$ . On marque  $P$  à l'intersection de  $(AJ)$  et  $[BC]$  (sélectionner cette droite et ce segment puis l'icône ) et  $Q$  à l'intersection de  $(AI)$  et  $[CD]$ .

fig7 : le point  $J$ fig8 : le point  $I$ 

Il suffit ensuite de cacher les éléments de la figure qui ne sont plus utiles (les droites  $(AI)$  et  $(AJ)$ , les points  $I$  et  $J$ ) pour finalement tracer le triangle  $APQ$  (icône ) . On a ici effectué un « Zoom boîte » pour mieux centrer le dessin (fig10). Là encore, on peut « tirer » sur l'un des cotés de  $ABCD$  pour voir se modifier le triangle  $APQ$ .

fig9 : les points  $P$  et  $Q$ fig10 : le triangle  $APQ$