Thème : Fonctions
Etude de recherche d'extremum et d'optimisation

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 4 Juillet 2006.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

1. L'exercice proposé au candidat

1. Pour tout réel α de $]0, 2[$, on considère la fonction $x \mapsto g_\alpha(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - (x + \alpha)^2}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_\alpha$ de g_α.
   Montrer que la courbe représentative de g_α possède un axe de symétrie vertical.
   (b) Montrer que pour tout x de $\mathscr{D}_\alpha$, on a $g''_\alpha(x) < 0$.
   En déduire que g_α admet un unique maximum en $x_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$.
2. En utilisant g_α, montrer que l'aire maximale d'un trapèze de hauteur α (avec $0 < \alpha < 2$) inscrit dans un cercle de rayon 1 est égale à $\alpha\sqrt{4 - \alpha^2}$ (en unités d'aire).

2. Le travail demandé au candidat

En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury

Pendant sa préparation, le candidat traitera les questions suivantes:

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans l'exercice.

Q.2) Utiliser la calculatrice pour vérifier les résultats des questions 1 et 2 (sans que cela se substitue aux calculs « à la main »).

Q.3) Quelle suite pourriez-vous donner à la question 2) ?

Sur ses fiches, le candidat rédigera et présentera :
– Sa réponse à la question Q.3).
– Deux exercices sur thème « problèmes d'optimisation ».

Proposition de corrigé avec le Classpad 300

I. L'exercice posé au candidat

1. (a) Le réel x est dans $\mathscr{D}_\alpha$ si et seulement si $\begin{cases} 1-x^2 \geqslant 0 \\ 1-(x+\alpha)^2 \geqslant 0 \end{cases}$

   Ainsi $x \in \mathscr{D}_\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant x+\alpha \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1-\alpha \leqslant x \leqslant 1-\alpha \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1-\alpha.$

   Le domaine $\mathscr{D}_\alpha$ de g_α est donc l'intervalle $I_\alpha = [-1, 1-\alpha]$ (de longueur $\ell = 2-\alpha > 0$).

   Si la courbe $y = g_\alpha(x)$ possède un axe vertical de symétrie, l'abscisse de celui-ci est nécessairement le milieu $x_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$ de $\mathscr{D}_\alpha$.

   Si x_1 décrit $\mathscr{D}_\alpha$, son symétrique $x_2 = -\alpha - x_1$ par rapport à x_0 décrit $\mathscr{D}_\alpha$ et :

   $$g_\alpha(x_2) = \sqrt{1-x_2^2} + \sqrt{1-(x_2+\alpha)^2} = \sqrt{1-(x_1+\alpha)^2} + \sqrt{1-x_1^2} = g_\alpha(x_1).$$

   La droite $x = -\dfrac{\alpha}{2}$ est donc un axe de symétrie vertical de la courbe $y = g_\alpha(x)$.

   (b) Remarquons que g_α est dérivable sur $\mathscr{D}'_\alpha = \mathscr{D}_\alpha \setminus \{-1, 1-\alpha\} =]-1, 1-\alpha[$.

   Si on pose $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, on a $g(x) = f(x) + f(x+\alpha)$.

   Pour tout x de $]-1,1[$, on a $f'(x) = -x(1-x^2)^{-1/2}$.

   De même $f''(x) = -(1-x^2)^{-1/2} - x^2(1-x^2)^{-3/2} = -(1-x^2)^{-3/2} = \dfrac{-1}{(1-x^2)^{3/2}} < 0.$

   Pour tout x de $\mathscr{D}'_\alpha$, on en déduit $g''(x) = f''(x) + f''(x+\alpha) < 0$.

   L'application g'_α est donc strictement décroissante sur $\mathscr{D}'_\alpha$.

   Or $g'\Big(-\dfrac{\alpha}{2}\Big) = f'\Big(-\dfrac{\alpha}{2}\Big) + f'\Big(\dfrac{\alpha}{2}\Big) = 0$ (logique connaissant l'axe de symétrie $x = -\dfrac{\alpha}{2}$).

   Ainsi $g'_\alpha(x) > 0$ sur $\Big]-1, -\dfrac{\alpha}{2}\Big[$ et $g'_\alpha(x) < 0$ sur $\Big]-\dfrac{\alpha}{2}, 1-\alpha\Big[$.

   L'application g_α est donc strictement croissante sur $\Big[-1, -\dfrac{\alpha}{2}\Big]$ et strictement décroissante sur $\Big[-\dfrac{\alpha}{2}, 1-\alpha\Big]$: elle admet un maximum absolu pour $x = x_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$.

   La valeur de ce maximum est $g_\alpha(x_0) = 2\sqrt{1-x_0^2} = 2\sqrt{1-\dfrac{\alpha^2}{4}} = \sqrt{4-\alpha^2}$.

2. La figure ci-contre montre un trapèze $ABCD$ de hauteur α (avec $0 < \alpha < 2$) inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1.

   Dans le repère $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les cotés $[AD]$ et $[BC]$ ont pour ordonnée x et $x+\alpha$ (avec $-1 \leqslant x \leqslant 1-\alpha$)).

   L'aire de ce trapèze vaut $\alpha\dfrac{AD+BC}{2} = \alpha(ED+FC)$.

   Mais $ED = \sqrt{1-x^2}$ et $FC = \sqrt{1-(x+\alpha)^2}$.

   L'aire de $ABCD$ vaut donc $\alpha\, g_\alpha(x)$.

   Elle est maximum (et vaut $\alpha\sqrt{4-\alpha^2}$) quand $x = -\dfrac{\alpha}{2}$.

   Alors $OE = OF = \dfrac{\alpha}{2}$ et $ED = FC$: le trapèze d'aire maximum est un rectangle de hauteur α, centré en O.

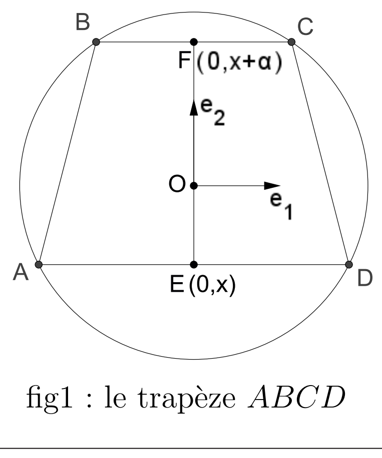

fig1 : le trapèze $ABCD$

II. Avec le Classpad

On voit ici comment vérifier quelques-uns des résultats précédents dans l'application Principale du Classpad.

On définit d'abord l'application $x \mapsto f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

On en déduit une définition de $x \mapsto g(x) = f(x) + f(x+\alpha)$.

On calcule $f''(x)$, visiblement strictement négative sur $]-1,1[$.

Il en résulte que $g''(x) = f''(x) + f''(x+\alpha)$ est toujours < 0.

On pose $x_0 = -\dfrac{\alpha}{2}$.

Le Classpad simplifie en 0 l'expression $g(x_0+t) + g(x_0-t)$, ce qui confirme l'existence d'un axe de symétrie vertical d'abscisse x_0.

On calcule enfin la valeur $g(x_0) = \sqrt{4-\alpha^2}$, qui représente donc le maximum de g_α sur son domaine de définition.

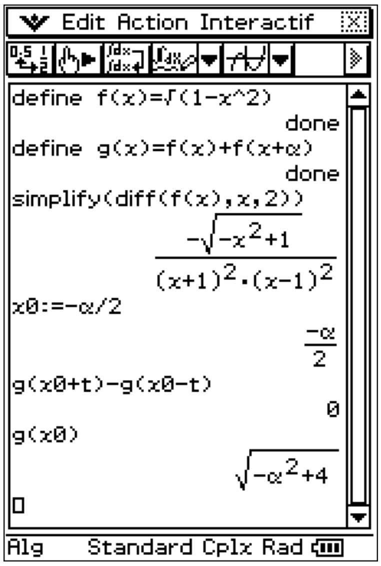

fig2 : calculs formels

On peut bien sûr étudier l'application g_α dans l'environnement Graphe&Ta... .
On y définit $y_1(x) = g(x)$ (avec la définition de g donnée plus haut).
On choisit une fenêtre de tracé égale à $[-1,1] \times [0,2]$ (icône).
Dans le menu ♦ « `Graph dynamique` », on choisit α comme paramètre, et on le fait varier de $\alpha = 0.1$ à $\alpha = 1.9$ avec un pas de 0.1. On choisit le mode manuel (fig3).
On lance le tracé par : la première courbe affichée est celle de g_α avec $\alpha = 0.1$ (fig4).
Chaque appui sur la touche de déplacement provoque alors le tracé d'une nouvelle courbe $y = g_\alpha(x)$, pour chacune des valeurs prévues du paramètre α.
On voit par exemple le tracé de $x \mapsto g_\alpha(x)$ pour $\alpha = 0.9$ (fig5).
Pour chacune des courbes affichées, on peut étudier la position du maximum (sélectionner la fenêtre graphique puis « `Analyse/Solveur graphique/fMax` ». Le Classpad place alors le curseur sur le point représentatif du maximum (par exemple, pour $\alpha = 0.9$, on trouve le point de coordonnées $x_c = -0.45$ et $y_c \approx 1.786$).

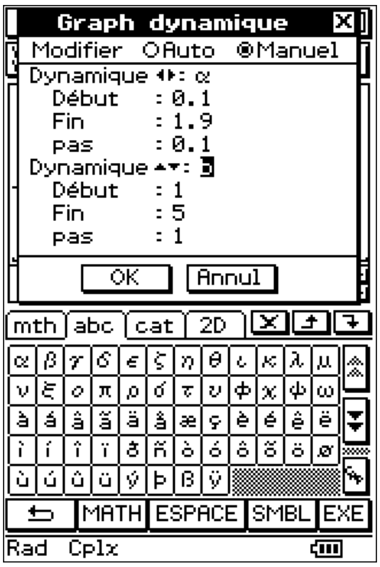

fig3 : graphe dynamique

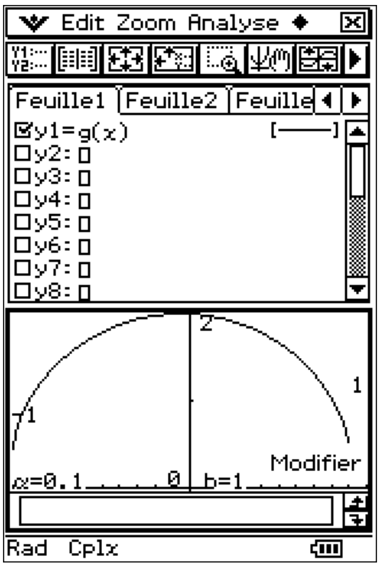

fig4 : $y = g_\alpha(x)$ avec $\alpha = 0.1$

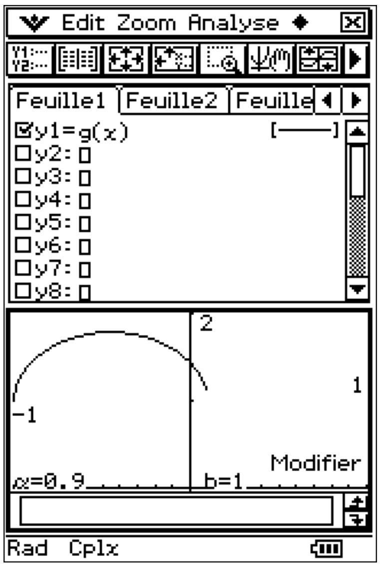

fig5 : $y = g_\alpha(x)$ avec $\alpha = 0.9$

On peut maintenant étudier le problème posé dans l'application Géométrie.

On fait place nette par « `Fich/Nouveau` ». On définit $[-1, 1]$ comme intervalle en x, et 0 comme valeur pour « `midy` » (le réglage s'effectue par « `Fenêtre Aff` »).

On utilise « `Aff/Grille entier` » pour afficher les points à coordonnées entières. On marque les points $A(0, -1)$, $B(0, 0)$ et $C(0, 1)$ (icône , la construction étant facilitée par le magnétisme des points à coefficients entiers).

On trace le segment vertical $[AC]$ (icône) puis le cercle de centre B et passant par les deux points A et B (icône).

On supprime l'affichage des points à coefficients entiers par « `Aff/Grille entier` ».

On crée un point D sur le segment $[AC]$, puis on forme le vecteur $\overrightarrow{DC}$ (sélectionner l'icône , puis D et C, cf fig7). Ce vecteur, automatiquement noté r par le Classpad, représentera pour nous un vecteur de longueur fixe α.

Il est maintenant préférable de cacher $[AC]$, ainsi que B et C (« `Edit/Propriétés/Caché` »).

On crée alors le segment $[AD]$ (les deux points A et D seront les positions limites de la base du trapèze que nous allons construire).

On crée un point E (a priori quelconque) puis on le lie au segment $[AD]$ (sélectionner E et $[AD]$, puis choisir « `Edit/Animer/Ajouter animation` »).

Désormais, le point E va pouvoir être animé sur le segment $[AD]$ (par défaut, il y a 20 étapes, mais ce nombre peut être modifié par « `Edit/Animer/Editer animations` »). Voir (fig8) l'état actuel de la construction.

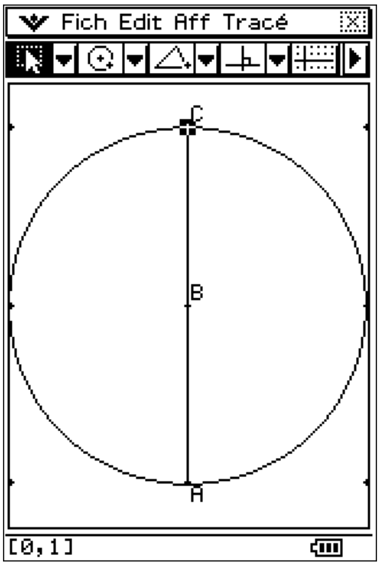

fig6 : cercle de rayon 1

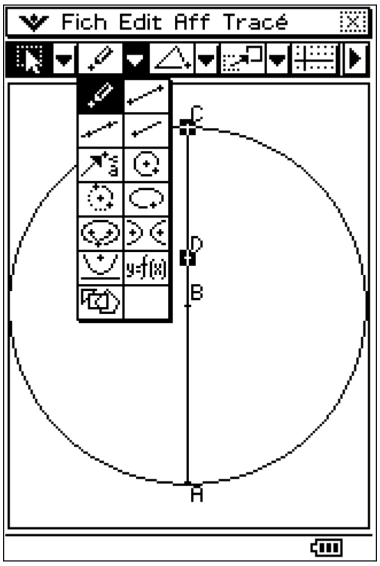

fig7 : créer le vecteur $\overrightarrow{DC}$

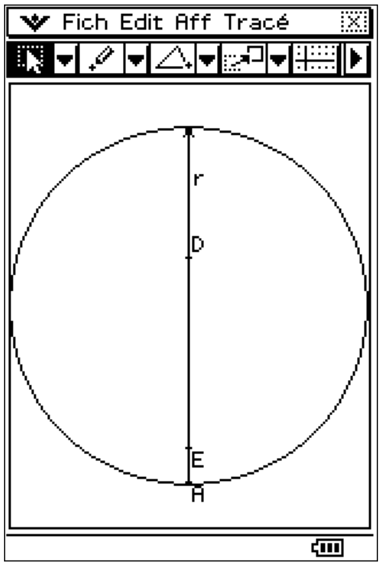

fig8 : le point E lié à $[AD]$

On va maintenant former l'image E' de E dans la translation de vecteur r. Pour cela, on sélectionne E puis l'icône (ou « `Tracer/Cosntruire/Translation` »). Une fenêtre s'ouvre nous demandant de définir le vecteur de translation (fig9).

Plutôt que de donner les composantes du vecteur, on choisit « `Sélect. vecteur` », ce qui ramène à la construction. On y sélectionne le vecteur r précédemment construit : le point E', image de E dans la translation de vecteur r, apparaît aussitôt (fig10).

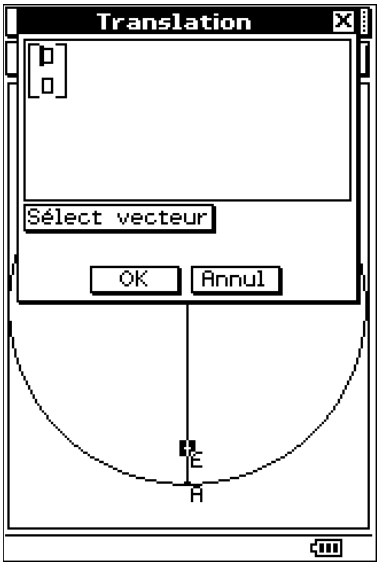

fig9 : choisir la translation t

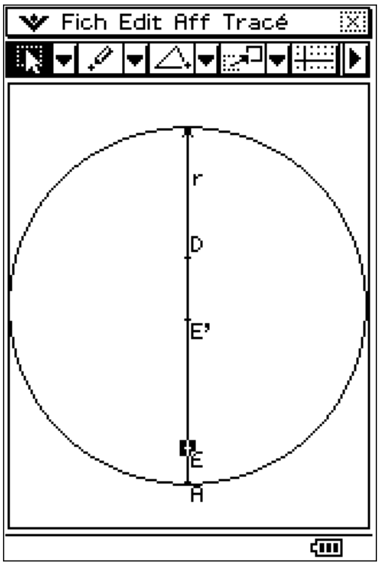

fig10 : le point $E' = t_r(E)$

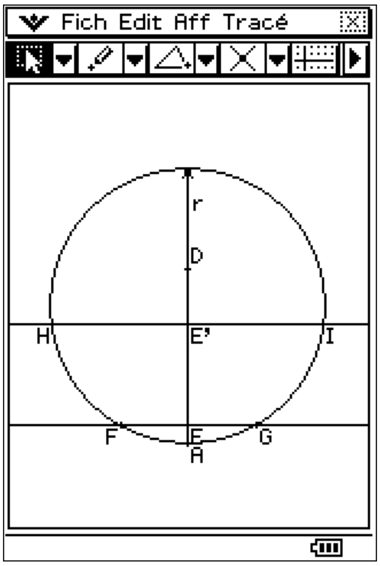

fig11 : les points F, G, H, I

On mène alors par E et E' les perpendiculaires au segment $[AD]$ (sélectionner E ou E', puis le segment $[AD]$, puis l'icône).

On construit les intersections F, G, H, I du cercle avec ces deux perpendiculaires, comme indiqué (fig11) (sélectionner une droite, le cercle, puis). Ici on a effectué un zoom arrière pour voir plus distinctement les nouveaux points.

Remarque : depuis le début de la construction, tous les points sont nommés de manière automatique par le Classpad. On peut très bien s'en contenter, mais on peut aussi renommer les points à sa guise.

On dessine le trapèze $FGIH$ (choisir puis relier les points). Pour plus de clarté, on a choisi de cacher un certain nombre de points (fig12). On peut bien sûr montrer à nouveau tous les éléments cachés (« `Edit:Tout montrer` »).

On peut alors sélectionner les quatre cotés pour mesurer l'aire du trapèze. Il suffit de pointer l'icône avec le stylet pour créer un champ numérique à l'écran, nommé automatiquement `Aire:` et affichant (dynamiquement) la valeur de cette aire (fig14).

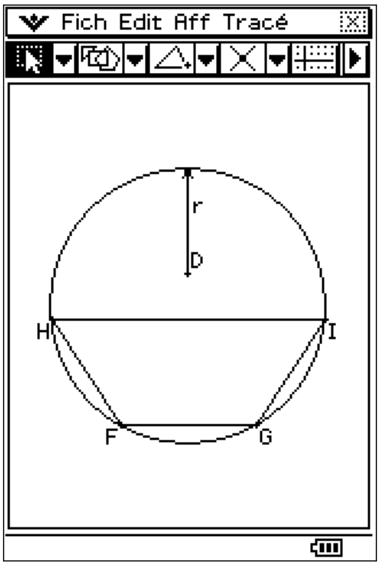

fig12 : le trapèze $FGIH$

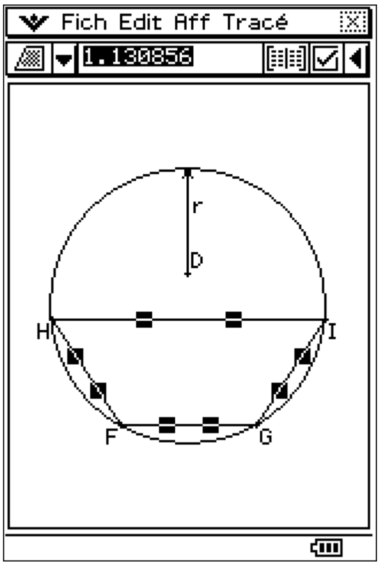

fig13 : l'aire du trapèze

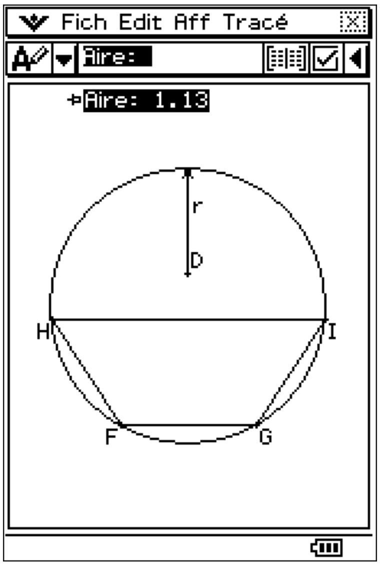

fig14 : champ dynamique

Il est temps d'animer la figure, automatiquement avec « `Edit/Animer/Lancer...` » ou manuellement en affichant le menu d'animation « `Aff/Animation UI` ». C'est cette dernière possibilité que nous utilisons ici. L'action sur le curseur permet d'afficher et de contrôler les différentes étapes de l'animation. On voit alors très bien que c'est quand le trapèze $FGIH$ est un rectangle que l'aire est maximale (voir fig15 à 18 quelques étapes de l'animation).

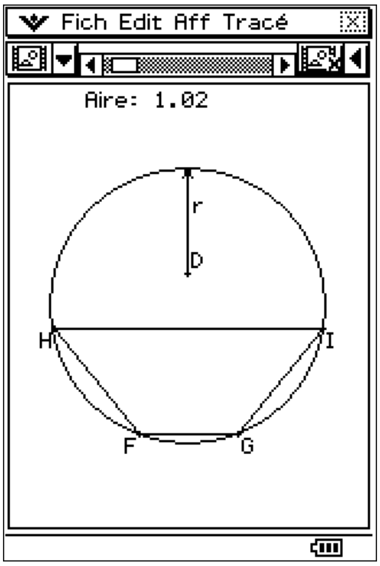

fig15

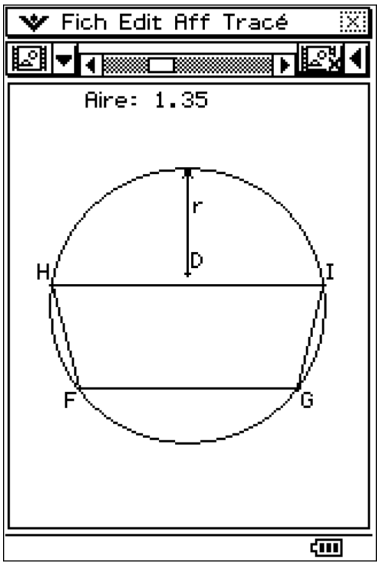

fig16

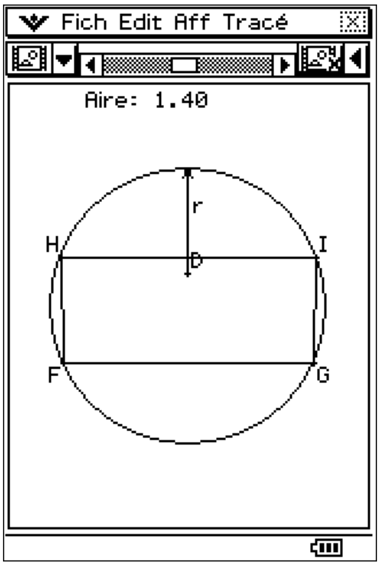

fig17

Trois étapes de l'animation du trapèze $FGIH$

On peut exporter toutes les valeurs de l'aire du trapèze (correspondant aux différentes étapes de l'animation). Pour cela, sélectionner les quatre cotés, puis l'icône (fig19). Il suffit ensuite de copier-coller cette liste de valeurs dans l'application Tableur pour en faire une étude statistique.

Rappelons que le trapèze a été construit de telle sorte que sa hauteur est constante, et déterminée par le vecteur r. Une autre possibilité d'exploiter la figure est de modifier la position du point D (donc la hauteur du trapèze) et de reprendre l'animation (fig20).

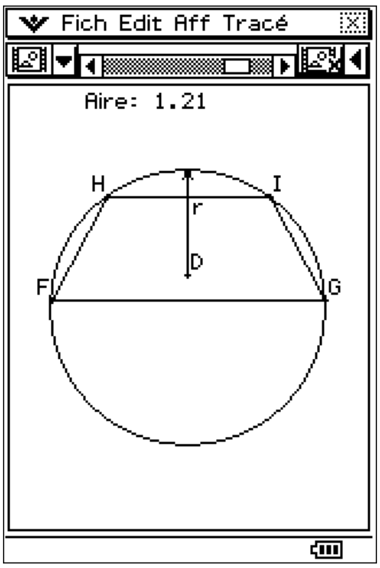

fig18 : encore une étape

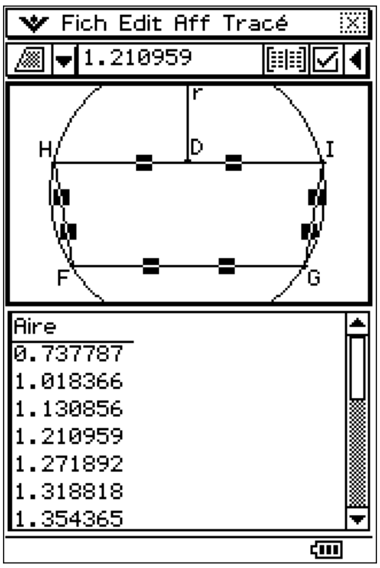

fig19 : exporter les données

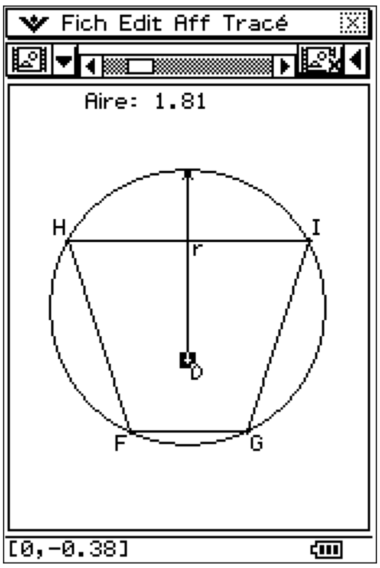

fig20 : modifier la hauteur