# Thème : Probabilités

Cet énoncé est celui de la deuxième épreuve orale (épreuve sur dossier) du Capes Externe de mathématiques, proposé aux candidat(e)s le 5 Juillet 2005.

Pour consulter les archives de cette épreuve orale, depuis la session 2005, on se reportera au site officiel du jury, à l'adresse http://capes-math.org/

## 1. L'exercice proposé au candidat

On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles puis on en calculera une valeur approchée à $10^{-2}$ près.

1. Une urne $U$ contient 4 jetons blancs et 3 jetons noirs. On tire successivement les 7 jetons sans remise. Soit $X$ la variable aléatoire qui prend la valeur $k$ lorsque le premier jeton blanc apparaît au $k$-ème tirage. Donner la loi de probabilité de $X$ et calculer son espérance mathématique.

2. Une urne $U_0$ contient 17 jetons blancs et 18 jetons noirs. On jette un dé cubique dont chaque face a la même probabilité d'apparaître. Si le 6 apparaît on tire un jeton de l'urne $U$, sinon on tire un jeton de l'urne $U_0$.
   - Démontrer que la probabilité de tirer un jeton blanc est $\frac{1}{2}$.
   - On a tiré un jeton blanc, calculer la probabilité pour qu'il provienne de l'urne $U$.

## 2. Le travail demandé au candidat

| |
|---|
| En aucun cas, le candidat ne doit rédiger sur sa fiche sa solution de l'exercice. Celle-ci pourra néanmoins lui être demandée partiellement ou en totalité lors de l'entretien avec le jury |

**Après avoir résolu et analysé l'exercice le candidat rédigera sur sa fiche les réponses aux questions suivantes :**

Q.1) Dégager les méthodes et les savoirs mis en jeu dans la résolution de l'exercice.

Q.2) Réaliser un arbre de probabilités pouvant servir de support à la résolution de la question 2).

Q.3) Proposer un ou plusieurs autres exercices sur le thème des probabilités et mettant en jeu l'étude d'une variable aléatoire.

# Proposition de corrigé avec le Classpad 300

## I. Corrigé de l'exercice

1. On peut représenter une issue élémentaire $\omega$ de l'expérience par un mot de 7 lettres contenant quatre fois la lettre $B$ et trois fois la lettre $N$.

   Par exemple, le mot $\omega = NBBNNBB$ signifie que les jetons blancs ont été tirés en positions 2, 3, 6 et 7.

   Avec ces notations, $X(\omega)$ est la position de la première occurrence de la lettre $B$ dans $\omega$.

   Il est clair que $X$ peut prendre toutes les valeurs de 1 (si le premier jeton tiré est blanc) à 4 (quant les trois premiers tirages ont amené les trois jetons noirs).

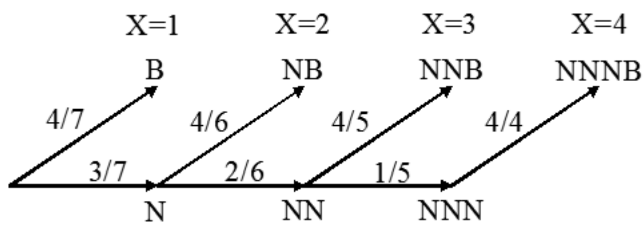
   – On a $p(X=1) = \dfrac{4}{7}$ (le premier des sept jetons tirés est l'un des quatre jetons blancs).

   – De même $p(X=2) = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{7}$ (le premier des sept jetons tirés est l'un des trois noirs, puis on tire un des quatre jetons blancs parmi les six jetons restants).

   – On a $p(X=3) = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{4}{35}$ (un des trois noirs parmi sept jetons, puis un des deux noirs restants parmi six jetons, puis un des quatre blancs parmi cinq jetons).

   – Enfin $p(X=4) = \dfrac{3}{7} \times \dfrac{2}{6} \times \dfrac{1}{5} \times \dfrac{4}{4} = \dfrac{1}{35}$

   Les calculs précédents peuvent être illustrés par un arbre de probabilités :




   On trouve maintenant l'espérance de $X$ :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{4} k\, p(X=k) = p(X=1) + 2p(X=2) + 3p(X=3) + 4p(X=4) \\ &= \frac{20}{35} + 2 \times \frac{10}{35} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{35} = \frac{56}{35} = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

2. Notons $B$ l'événement « le jeton tiré est blanc » et $D$ l'événement « le dé renvoie 6 ».

   La formule des probabilités totales donne :

   $p(B) = p(D)p_D(B) + p(\overline{D})p_{\overline{D}}(B) = \dfrac{1}{6}\, p_D(B) + \dfrac{5}{6}\, p_{\overline{D}}(B)$.

   Mais $p_D(B) = \dfrac{4}{7}$ (probabilité de tirer un jeton blanc de l'urne $U$).

   De même $p_{\overline{D}}(B) = \dfrac{17}{35}$ (probabilité de tirer un jeton blanc de l'urne $U_0$).

   On en déduit : $p(B) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{4}{7} + \dfrac{5}{6} \times \dfrac{17}{35} = \dfrac{4}{42} + \dfrac{17}{42} = \dfrac{1}{2}$.

On demande ensuite quelle est la probabilité, sachant que le jeton tiré est blanc, pour qu'il provienne de l'urne $U$ (c'est-à-dire pour que le dé ait amené le résultat 6).

Il s'agit donc de calculer la probabilité conditionnelle $p_B(D)$.

On sait maintenant que $p(B) = \dfrac{1}{2}$.

On en déduit $p_B(D) = \dfrac{p(B \cap D)}{p(B)} = 2\,p(B \cap D) = 2\,p(D)\,p_D(B) = 2 \times \dfrac{1}{6} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{21}$.

## II. Avec le Classpad

Il est facile de simuler l'expérience étudiée dans la première question.
On peut par exemple commencer par « fabriquer » l'urne $U$ contenant $b$ boules blanches et $n$ boules noires.

Cette urne est en fait une liste contenant $b$ fois le symbole $B$ et $n$ fois le symbole $N$. On voit (fig1) comment donner une valeur aux variables $b$ et $n$, puis comment créer la liste $U$ (l'intruction est `U:=augment(fill(B,b),fill(N,n))`.

Le programme `tirage` (fig2) simule l'expérience consistant à vider l'urne. Le résultat est placé dans la variable globale `T` (comme « tirage »), sous la forme d'une liste où apparaissent les symboles $B$ et $N$ dans l'ordre du tirage (fig1).

Le programme `attente` (fig3) renvoie, dans la variable globale `X`, le temps d'attente de `B` dans un tirage sans remise depuis l'urne `U`. On voit (fig1) un exemple où la première boule blanche est apparue lors du deuxième tirage.

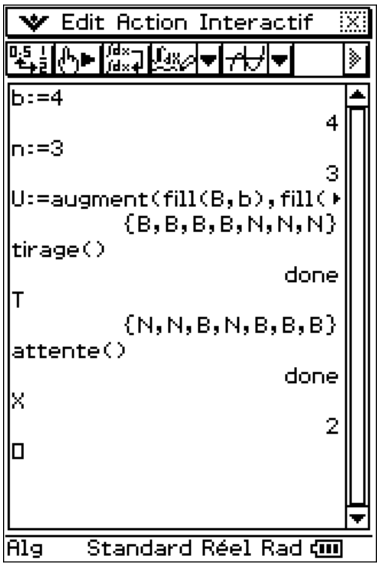



fig1 : simulation de tirage

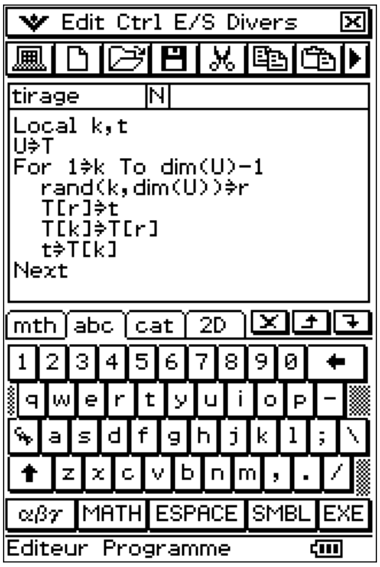



fig2 : programme `tirage`

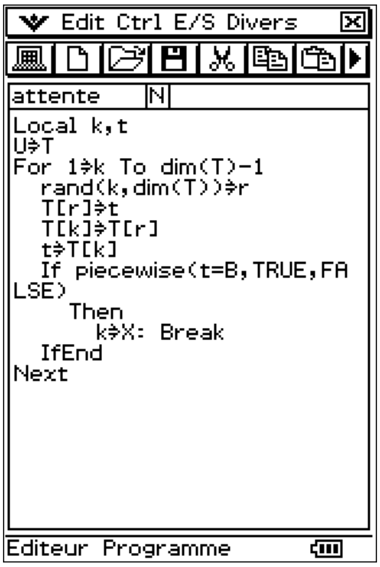



fig3 : programme `attente`

Le programme `simul` (fig4) prend en argument un entier `s`, et simule la répétition consistant à vider l'urne $U$. Il utilise le contenu de la variable globale `n` devant contenir le nombre de jetons noirs (on rappelle que la variable aléatoire $X$ prend ses valeurs dans $\{1, \ldots, n+1\}$).

Le résultat est renvoyé dans la variable globale `P` sous la forme d'une liste de fréquences.

On rappelle que $\begin{cases} p(X=1) = \dfrac{4}{7} \approx 0.57 \\ p(X=2) = \dfrac{2}{7} \approx 0.29 \end{cases}$ et $\begin{cases} p(X=3) = \dfrac{4}{35} \approx 0.11 \\ p(X=4) = \dfrac{1}{35} \approx 0.03 \end{cases}$

On voit (fig5) une succession de quatre appels au programme `simul`, avec l'argument 100. On simule ainsi, quatre fois de suite, une succession de cent expériences identiques consistant à vider l'urne $U$. Après cent expériences, on affiche (en mode décimal) les fréquences du temps d'attente du premier jeton blanc (ces valeurs sont peu différentes du résultat théorique).

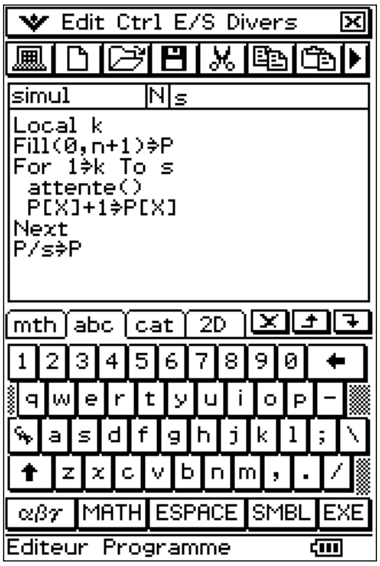



fig4 : programme `simul`

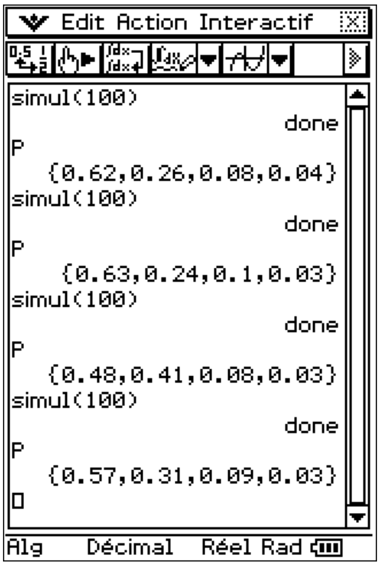



fig5 : $4 \times 100$ tirages

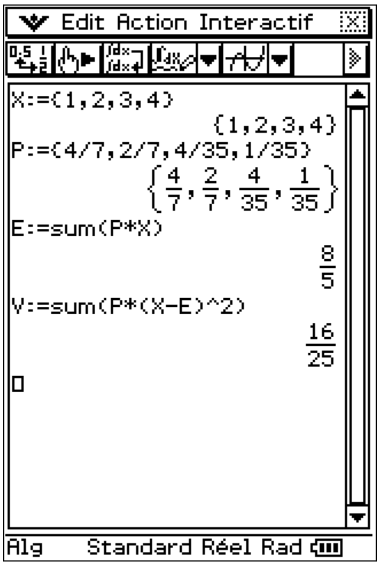



fig6 : espérance et variance

On voit (fig6) comme il est simple de calculer l'espérance et la variance de $X$.

On utilise pour cela les facilités de calcul sur les listes offertes par le Classpad.

- On place dans `X` la liste des valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X$.
- On place dans `P` la liste des probabilités correspondantes.
- L'expression `sum(P*X)` renvoie la somme $\sum p(X=x_k)\, x_k$ c'est-à-dire l'espérance de $X$.

  On retrouve bien $E(X) = \dfrac{8}{5}$, et le résultat est placé dans la variable `E`.
- `sum(P*(X-E)^2)` renvoie la somme $\sum p(X=x_k)\,(x_k - E(X))^2$ c'est-à-dire la variance de $X$.

## III. Une généralisation de l'exercice

On propose ici de généraliser la situation évoquée dans l'exercice du jury.

On considère une urne composée de $b$ jetons blancs et de $n$ jetons noirs ($b \geqslant 1,\ n \geqslant 1$).

On tire successivement les $n+b$ jetons sans remise.

Soit $X$ la variable aléatoire qui prend la valeur $k$ lorsque le premier jeton blanc apparaît au $k$-ème tirage (c'est donc le temps d'attente du premier jeton blanc).

Soit $Y$ la variable aléatoire qui prend la valeur $k$ lorsque le dernier jeton blanc apparaît au $k$-ème tirage (c'est donc le temps d'attente du dernier jeton blanc).

On demande les lois de probabilité de $X$ et $Y$, et leur espérance mathématique.

### 1. La loi et l'espérance de $Y$ ramenées à celles de $X$

On peut représenter une issue élémentaire $\omega$ de l'expérience par un mot de $n+b$ lettres contenant $b$ fois la lettre $B$ et $n$ fois la lettre $N$.

Le nombre de ces mots est $\binom{n+b}{b}$ (chacun d'eux est en effet caractérisé par la position des $b$ lettres $B$ parmi les $n+b$ lettres du mot).

La variable $X$ (temps d'attente du premier jeton blanc) peut prendre toutes les valeurs de $k=1$ (si le premier jeton tiré est blanc) à $k=n+1$ (si les $n$ premiers jetons tirés sont noirs).

De même, $Y$ peut prendre toutes les valeurs de $b$ (si les $b$ premiers jetons sont blancs) à $n+b$ (si le dernier jeton tiré est blanc).

Quand on parle de $X$ comme mesurant le temps d'attente du premier jeton blanc, c'est qu'on lit ce mot de gauche à droite. Si on décide de le lire de droite à gauche, ce qui était le premier jeton blanc tiré devient le dernier jeton blanc tiré.

Plus précisément, pour tout $k$ de $\{b,\ldots,n+b\}$, on a $p(Y=k)=p(X=n+b+1-k)$.

On voit donc que la loi de $X$ permet de connaître celle de $Y$.

Pour ce qui est des espérances, on a :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=b}^{n+b} k\,p(Y=k) = \sum_{k=b}^{n+b} k\,p(X=n+b+1-k)\\
&= \sum_{j=1}^{n+1} (n+b+1-j)p(X=j) \qquad \text{(on a posé } k=n+b+1-j\text{)}\\
&= (n+b+1)\sum_{j=1}^{n+1} p(X=j) - \sum_{j=1}^{n+1} j\,p(X=j) = n+b+1-E(X)
\end{aligned}$$

On voit donc que l'espérance de $Y$ est une fonction très simple de celle de $X$.

### 2. Une situation d'équiprobabilité

La première chose à remarquer est que les différentes issues élémentaires de l'expérience (c'est-à-dire les mots $\omega$ de $n+b$ lettres contenant $b$ fois la lettre $B$ et $n$ fois la lettre $N$) sont équiprobables, ce qui n'est pas si évident au départ.

Pour s'en convaincre, on peut imaginer que les jetons sont numérotés de 1 à $n+b$, et qu'on ne s'intéresse qu'aux numéros successifs obtenus. Un tirage est alors une permutation de l'ensemble $\{1,\ldots,n+b\}$, et il y a $(n+b)!$ telles permutations, toutes équiprobables.

Dans ces conditions, il y a $n!\,b!$ tirages qui vont donner le même mot $\omega$.

Il y a en effet $n!$ façons de permuter les numéros des jetons noirs (sur les $n$ positions qui leur sont attribuées dans le mot $\omega$) et $b!$ façons de permuter ceux des jetons blancs (sur les $b$ positions qui leur sont attribuées dans $\omega$).

C'est pourquoi la probabilité d'apparition d'un mot donné $\omega$ est $p_\omega = \dfrac{n!\,b!}{(n+b)!} = \dfrac{1}{\binom{n+b}{b}}$.

Une autre méthode (pour montrer que les mots $\omega$ sont équiprobables) est de constater que la probabilité d'apparition d'un mot donné est un produit de probabilités (conditionnelles) $p_k = a_k/b_k$, où les $a_k$ prennent d'une part toutes les valeurs de $\{1,\ldots,n\}$ et d'autre part toutes celles de $\{1,\ldots,b\}$, et où les $b_k$ prennent toutes les valeurs de $\{1,\ldots,n+b\}$.

En effet, et en se limitant par exemple à $b = 7$ et $n = 5$ :

La probabilité d'apparition du mot $\boxed{\text{B}}\,\text{N N N}\,\boxed{\text{B}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{B}}\,\text{N N}\,\boxed{\text{B}}\boxed{\text{B}}\boxed{\text{B}}$ est

$$\frac{\boxed{7}}{12} \times \frac{5}{11} \times \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{\boxed{6}}{8} \times \frac{\boxed{5}}{7} \times \frac{\boxed{4}}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{\boxed{3}}{3} \times \frac{\boxed{2}}{2} \times \frac{\boxed{1}}{1} = \frac{7!\,5!}{12!}$$

**3. La loi de la variable aléatoire $X$**

On sait que $X$ peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à $n + 1$.

On se donne un entier $k$ dans $\{1, \ldots, n + 1\}$.

Pour obtenir $p(X = k)$, il faut calculer le nombre de mots $\omega$ (au sens précédent) qui contiennent d'abord $k - 1$ fois la lettre $N$, la $k$-ème lettre étant un $B$. Il y a autant de façons de former ce mot que de répartir les $b - 1$ lettres $B$ restantes dans les $n + b - k$ positions restantes (de le position $k + 1$ à la position $n + b$).

Ce nombre est $\binom{n+b-k}{b-1}$, et il en résulte $p(X = k) = \dfrac{\binom{n+b-k}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$, pour $1 \leqslant k \leqslant n + 1$.

Remarque : même si c'est moins "élégant", on peut calculer directement $p(X = k)$, sans passer par les raisonnements précédents (équiprobabilité et dénombrement). Il suffit en effet de calculer $p(X = k)$ comme un produit de probabilités conditionnelles.

On trouve $p(X = k) = \underbrace{\dfrac{n}{n+b} \times \dfrac{n-1}{n+b-1} \times \cdots \dfrac{n-k+2}{n+b-k+2}}_{k-1 \text{ jetons noirs}} \times \underbrace{\dfrac{b}{n+b-k+1}}_{1 \text{ jeton blanc}}$.

Alors : $p(X = k) = \dfrac{n!}{(n-k+1)!}\,\dfrac{(n+b-k)!}{(n+b)!}\,b = \dfrac{(n+b-k)!}{(b-1)!(n-k+1)!}\,\dfrac{n!\,b!}{(n+b)!} = \dfrac{\binom{n+b-k}{b-1}}{\binom{n+b}{b}}$

Avant d'aller plus loin, on peut faire quelques expériences avec le Classpad !

Voici comment (fig7) on peut calculer la loi, l'espérance et la variance de la variable $X$, en fonctions des entiers $b$ (nombre de jetons blancs) et $n$ (nombre de jetons noirs).

Pour plus de lisibilité, on utilisé ici l'écran du « Classpad Manager » :

- On définit la fonction `P` (arguments $k, b, n$) calculant la probabilité de l'événement $X = k$.
- On définit la fonction `L` (arguments $b, n$) donnant la loi de $X$, c'est-à-dire la liste des probabilités $p(X = k)$, pour $1 \leqslant k \leqslant n + 1$.

  On vérifie par exemple que `L(4,3)` renvoie les probabilités $p(X = k)$ quand $b = 4$ et $n = 3$.
- La fonction `X` (argument $n$) renvoie la liste $\{1, \ldots, n + 1\}$ des valeurs que peut prendre $X$.
- La fonction `E` (arguments $b, n$) renvoie l'espérance de la loi de $X$.

  Avec $b = 4$ et $n = 3$, on retrouve bien $E(X) = \dfrac{8}{5}$.
- La fonction `V` (arguments $b, n$) renvoie l'espérance de la loi de $X$.

  Avec $b = 4$ et $n = 3$, on retrouve bien $V(X) = \dfrac{16}{25}$.

On peut alors faire quelques essais (fig8) qui militent en faveur de la formule $E(X) = \dfrac{n+b+1}{b+1}$.

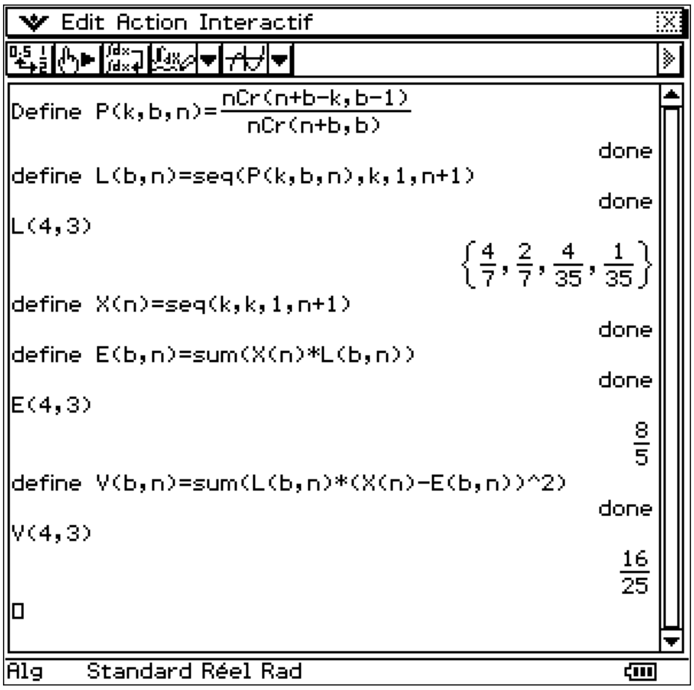



fig7 : calcul de l'espérance et de la variance de $X$

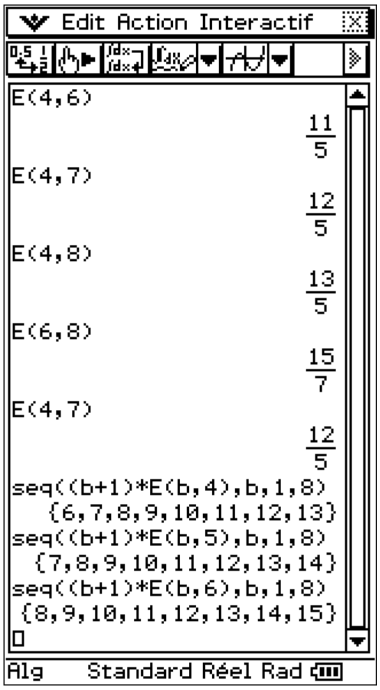



fig8 : quelques essais

**4. L'espérance de la variable aléatoire $X$**

Il nous faut donc calculer $E(X) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} k\, p(X=k) = \dfrac{1}{\binom{n+b}{b}} \sum\limits_{k=1}^{n+1} k \binom{n+b-k}{b-1}$.

Montrons que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \binom{n+b-k}{b-1} = \binom{n+b+1}{b+1}$.

On va pour cela effectuer un raisonnement par dénombrement, en supposant $b \geqslant 2$.

NB : si $b=1$, on a bien $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k \binom{n+b-k}{b-1} = \sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = \binom{n+2}{2} = \binom{n+b+1}{b+1}$.

Tout se passe comme si on considérait toutes les possibilités de tirer sans remise tous les jetons d'une urne contenant $b+1$ jetons blancs et $n$ jetons noirs, et en effectuant le dénombrement suivant le rang d'apparition $q = k+1$ du *deuxième* jeton blanc (de $q=2$ à $q=n+2$).

Il y a $\binom{n+b+1}{b+1}$ tirages possibles (chacun caractérisé par la position des $b+1$ jetons blancs).

Fixons alors la position $q = k+1$ d'apparition du *deuxième* jeton blanc ($1 \leqslant k \leqslant n+1$).

– Il faut placer les $b-1$ derniers jetons blancs parmi les $n+b+1-(k+1) = n+b-k$ positions restantes, ce qui peut se faire de $\binom{n+b-k}{b-1}$ façons différentes.
– Le premier jeton blanc peut apparaître indifféremment de la position 1 à la position $k$.

Il y a donc $k\binom{n+b-k}{b-1}$ possibilités en plaçant en position $k+1$ le $2^{\text{ème}}$ jeton blanc.

Quand on fait varier $k$ de 1 à $n+1$, on obtient toutes les possibilités de tirer sans remise tous les jetons d'une urne contenant $b+1$ jetons blancs et $n$ jetons noirs.

Ainsi $\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+b-k}{b-1} = \binom{n+b+1}{b+1}$.

On en déduit : $E(X) = \dfrac{1}{\binom{n+b}{b}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+b-k}{b-1} = \dfrac{\binom{n+b+1}{b+1}}{\binom{n+b}{b}} = \dfrac{(n+b+1)!}{n!\,(b+1)!}\,\dfrac{n!\,b!}{(n+b)!}$

Finalement, le résultat est extrêmement simple : $E(X) = \dfrac{n+b+1}{b+1} = 1 + \dfrac{n}{b+1}$.

Remarque : avec $b=4$ et $n=3$, on retrouve le résultat $E(X) = \dfrac{8}{5}$ de l'exercice du jury.

Encore une petite expérience avec le Classpad (toujours dans l'écran du Classpad Manager, mais le résultat est évidemment identique sur la calculatrice elle-même).
On définit l'espérance de $X$ sous la forme d'une fonction `EX` des deux arguments $b$ et $n$.

On vérifie que pour $b=4$ et $n=3$, on retrouve bien $E(X) = \dfrac{8}{5}$.
Mais surtout, on voit que le Classpad est capable de simplifier l'expression générale de l'espérance et qu'il nous donne $E(X) = \dfrac{b+n+1}{b+1}$ pour toutes valeurs de $n$ et $b$ (fig9).

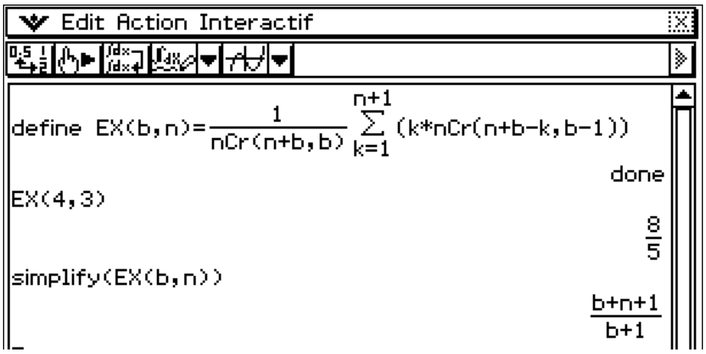



fig9 : calcul de l'espérance de la variable aléatoire $X$

**5. L'espérance de $X$ sans passer par la loi de $X$**

Quand on voit une expression aussi simple pour $E(X)$, on ne peut s'empêcher de penser qu'il existe une autre méthode. C'est le cas en effet ! L'idée est très astucieuse mais malheureusement elle n'est pas de moi `:-(`. C'est celle d'une brillante collègue.

On numérote les $n$ jetons noirs de $N_1$ à $N_n$.

Pour tout $k$ de $\{1,\ldots,n\}$, soit $Z_k$ la variable de Bernoulli (c'est-à-dire valant soit 0 soit 1) et qui prend la valeur 1 si le jeton noir $N_k$ apparaît avant le premier jeton blanc.

On observe que $X$ (temps d'apparition du premier jeton blanc) s'écrit $X = 1 + \sum_{k=1}^{n} Z_k$.

Ainsi : $E(X) = 1 + \sum_{k=1}^{n} E(Z_k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} p(Z_k = 1)$ (linéarité de l'espérance).

Il reste à observer que $p(Z_k = 1)$ (c'est-à-dire la probabilité que le jeton noir $N_k$ apparaisse avant le premier des $b$ jetons blancs) est égale à $\dfrac{1}{b+1}$.

En effet, tout se passe comme si on ne relevait que les ordres d'apparition du jeton noir $N_k$ et des $b$ jetons blancs. Chacun des relevés est un mot de $b+1$ lettres contenant une fois la lettre $N_k$ et $b$ fois la lettre $B$. Tous ces relevés sont équiprobables et il y en a $b+1$. La probabilité cherchée ici est celle d'un relevé commençant par la lettre $N_k$.

Conclusion : on retrouve $E(X) = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{b+1} = 1 + \dfrac{n}{b+1}$.

Remarque : Si le nombre $n$ de jetons noirs est très faible devant le nombre $b$ de jetons blancs, l'espérance $E(X)$ est proche de 1 (c'est logique). Ce genre de vérification est toujours utile.

**6. Retour à la variable aléatoire $Y$**

Rappelons que $Y$ mesure le temps d'attente du dernier des $b$ jetons blancs (quand on extrait sans remise, un par un, les $n+b$ jetons de l'urne).

D'après ce qui a été dit dans la question 1 :

Pour tout $k$ de $\{b, \ldots, n+b\}$, on a $p(Y = k) = p(X = n+b+1-k) = \dfrac{\dbinom{k-1}{b-1}}{\dbinom{n+b}{b}}$.

Enfin, $E(Y) = n+b+1 - E(X) = n+b - \dfrac{n}{b+1} = \dfrac{b(n+b+1)}{b+1}$.

**7. Calcul de la variance de $X$**

Reprenons l'expression $X = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$ vue dans la question 5.

Rappelons que les $Z_k$ sont des variables de Bernoulli. Elles vérifient donc $Z_k^2 = Z_k$.

On en déduit $X^2 = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} Z_k^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k + 2\sum\limits_{1 \leqslant j < k \leqslant n} Z_j Z_k = 1 + 3\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k + 2\sum\limits_{1 \leqslant j < k \leqslant n} Z_j Z_k$.

Dans cette écriture, $Z_j Z_k$ est une variable de Bernoulli.

Il en résulte $E(Z_j Z_k) = p(Z_j Z_k = 1) = p(A_{jk})$ avec $A_{jk} = (Z_j = 1) \cap (Z_k = 1)$.

Imaginons que lorsque nous vidons l'urne, nous ne relevions que les positions respectives des $b$ jetons blancs et des deux jetons noirs $N_j$ et $N_k$.

Chaque relevé est alors un mot de $b+2$ lettres contenant deux fois $N$ et $b$ fois $B$.

Tous ces mots sont équiprobables et il y en a $\dbinom{b+2}{2} = \dfrac{(b+2)(b+1)}{2}$ (caractérisés par la position des deux $N$ parmi les $b+2$ lettres).

La probabilité de $A_{jk}$ est celle du seul mot débutant par $NN$, donc $p(A_{jk}) = \dfrac{2}{(b+2)(b+1)}$.

Par linéarité de l'espérance, et comme la dernière somme comporte $\dfrac{n(n-1)}{2}$ termes, on trouve :

$E(X^2) = 1 + 3\sum\limits_{k=1}^{n} E(Z_k) + 2\sum\limits_{1 \leqslant j < k \leqslant n} E(Z_j Z_k) = 1 + \dfrac{3n}{b+1} + \dfrac{2n(n-1)}{(b+2)(b+1)} = \dfrac{(b+2n+2)(n+b+1)}{(b+2)(b+1)}$

Il en résulte :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{(b+2n+2)(n+b+1)}{(b+2)(b+1)} - \left(\dfrac{n+b+1}{b+1}\right)^2 = \dfrac{nb(b+n+1)}{(b+1)^2(b+2)}$.

Remarques :

– Reprenons les valeurs $b = 4$ et $n = 3$ de l'exercice du jury. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{k=1}^{4} p(X=k)(k-E(X))^2 \\ &= \frac{4}{7}\left(1-\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{2}{7}\left(2-\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{35}\left(3-\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{1}{35}\left(4-\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \end{aligned}$$

Effectivement, avec $b = 4$ et $n = 3$, on a bien $\dfrac{nb(b+n+1)}{(b+1)^2(b+2)} = \dfrac{16}{25}$.

– Si $n = b + 1$, c'est-à-dire s'il y a dans l'urne un jeton noir de plus que les $b$ jetons blancs, alors $E(X)$ et $V(X)$ prennent des valeurs très simples : $E(X) = 2$ et $V(X) = \dfrac{2b}{b+2}$.

– On s'est aidé du Classpad pour les derniers calculs...

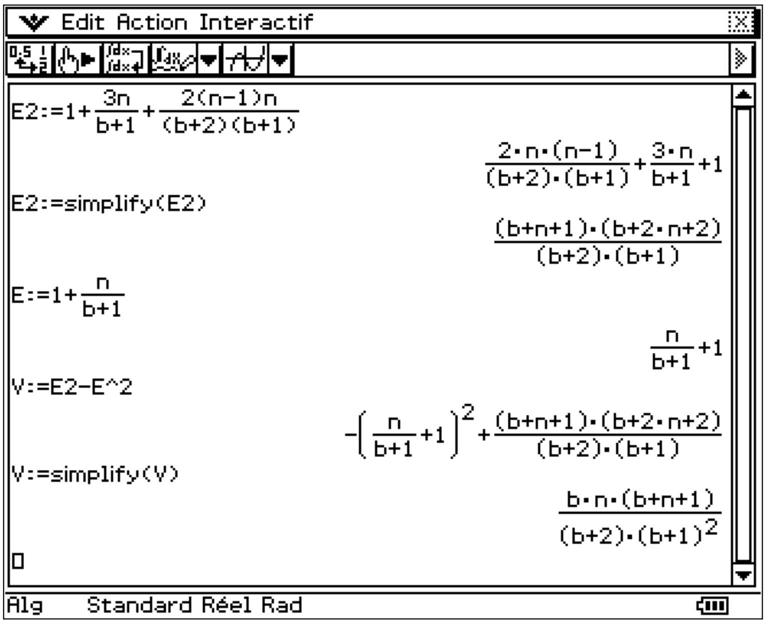



fig10 : vérification des calculs avec le Classpad